Cinquième composition de mathématiques [corrigé]

Exercice 1. Questions de cours.

Dans les trois premières questions, on vous demande d'énoncer un résultat de cours, sans justification.

1. Énoncer précisément la formule du binôme de Newton pour des matrices.

   Pour tout $n \geqslant 1$ *et toutes matrices* $A, B \in M_n(K)$ ***qui commutent****, on a*

$$\forall k \in \mathbb{N}, (A+B)^k = \sum_{\ell=0}^{k} \binom{k}{\ell} A^k B^{k-\ell}.$$

2. Énoncer précisément le critère nucléaire d'inversibilité.

   Pour tout $n \geqslant 1$ *et toute matrice* $A \in M_n(K)$, *on a* $A \in GL_n(K)$ *si et seulement si* $\ker A = \{0_{K^n}\}$.

3. Énoncer la règle de multiplication des matrices élémentaires. Pour simplifier, contentez-vous de le faire pour des matrices carrées de format $n \times n$.

   Pour tous $i, j, k, \ell \in [\![1, n]\!]$, *on a* $E_{i,j}E_{k,\ell} = \delta_{j,k}E_{i,\ell}$.

4. La matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ est-elle inversible ?

   Si oui, préciser son inverse.

   On a $\text{dét}\, A = 1 \times 4 - 2 \times 3 = -2 \neq 0$, *donc* A *est inversible. On a*

$$A^{-1} = \frac{1}{-2} \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{pmatrix}.$$

Exercice 2. Quelques calculs.

1. Soit $a \in \mathbb{C}$.

   En fonction des valeurs de ce paramètre, résoudre le système suivant, d'inconnue $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^3$:

$$\begin{cases} x + y - z = 1 \\ 3x + 2y + 2z = 2 \\ 2x + y + 3z = a. \end{cases}$$

   On a

$$\begin{cases} x + y - z = 1 \\ 3x + 2y + 2z = 2 \\ 2x + y + 3z = a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y - z = 1 \\ -y + 5z = -1 \\ -y + 5z = a - 2 \end{cases} \qquad \begin{bmatrix} L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + 4z = 1 \\ y - 5z = 1 \\ 0 = a - 1. \end{cases} \qquad [L_2 \leftarrow -L_2] \text{ \textit{puis} } \begin{bmatrix} L_1 \leftarrow L_1 - L_2 \\ L_3 \leftarrow L_3 + L_2 \end{bmatrix}$$

Ainsi,

- *si* $a \neq 1$, *l'équation de compatibilité* $0 = a - 1$ *montre que le système est incompatible : il n'y a pas de solution ;*
- *si* $a = 1$, *l'équation de compatibilité est* $0 = 0$, *et le système est compatible. En « faisant passer* z *en paramètre, » on obtient que l'ensemble des solutions est*

$$\left\{ \begin{pmatrix} -4z \\ 1+5z \\ z \end{pmatrix} \;\middle|\; z \in \mathbb{C} \right\}.$$

2. (a) Calculer les puissances de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Un calcul direct montre $A^2 = 0$. *On en déduit*

$$\forall n \in \mathbb{N}, A^n = \begin{cases} I_2 & \textit{si } n = 0 \\ A & \textit{si } n = 1 \\ 0 & \textit{si } n \geqslant 2. \end{cases}$$

(b) En déduire les puissances de $B = \begin{pmatrix} 8 & -1 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}$.

Soit $n \geqslant 1$. *Il est clair que* $7I_2$ *et* A *commutent donc on peut appliquer le binôme de Newton et obtenir*

$$\begin{aligned} B^n = (7I_2 + A)^n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (7I_2)^k A^{n-k} \\ &= \binom{n}{0}(7I_2)^n A^0 + \binom{n}{1}(7I_2)^{n-1} A^1 \\ &= 7^n I_2 + n7^{n-1} A. \end{aligned}$$

Puisque cette formule est, rétrospectivement, valable y compris si $n = 0$, *on a montré*

$$\forall n \in \mathbb{N}, B^n = 7^n I_2 + n7^{n-1} A = \begin{pmatrix} (7+n)7^{n-1} & -n7^{n-1} \\ n7^{n-1} & (7-n)7^{n-1} \end{pmatrix}.$$

Exercice 3. Un ensemble de matrices non inversibles.

Dans cet exercice, K désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1. Montrer qu'étant donné deux entiers $q > p \geqslant 1$, toute matrice $R \in M_{p,q}(K)$ vérifie $\ker R \neq \{0\}$.

- *Pour ne pas traîner deux entiers, on commence par traiter le cas particulier* $q = p + 1$.

  Pour tout $p \geqslant 1$, *on note* $P(p)$ *l'assertion «* $\forall A \in M_{p,p+1}(K), \ker A \neq \{0\}$. *»*

  Montrons $\forall p \geqslant 1, P(p)$ *par récurrence.*

  Initialisation. *Soit* $A = \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix} \in M_{1,2}(K)$.

  - *Si* $a = 0$, *on a* $A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = (0)$, *donc* $e_1 \in \ker A$.
  - *Si* $a \neq 0$, *on a* $A \begin{pmatrix} -b/a \\ 1 \end{pmatrix} = 0$, *donc* $\begin{pmatrix} -b/a \\ 1 \end{pmatrix} \in \ker A$.

  Tous les cas ayant été traités, on a montré $P(1)$.

Hérédité. *Soit* $p \in \mathbb{N}^*$ *tel que* $P(p)$. *Soit* $A \in M_{p+1,p+2}(K)$.

- *Si la première colonne de* A *est nulle, on a* $Ae_1 = 0$.
- *Supposons que la première colonne de* A *ne soit pas nulle. Par des opérations élémentaires, on peut ramener un coefficient non nul en position* $(1, 1)$, *le dilater pour le rendre égal à* 1, *puis utiliser des transvections pour rendre le reste de la première colonne nul.*

  En multipliant les matrices d'opérations élémentaires correspondant à ces opérations, on trouve une matrice $P \in GL_{p+1}(K)$ *telle que la première colonne de* PA *soit* e_1.

  On peut donc trouver $\widetilde{A} \in M_{p,p+1}(K)$ *et* $L \in M_{1,p+1}(K)$ *telles que*

$$PA = \begin{pmatrix} 1 & L \\ 0 & \widetilde{A} \end{pmatrix}.$$

  D'après $P(p)$, *on peut trouver un vecteur non nul* $\widetilde{X} \in K^{p+1}$ *tel que* $\widetilde{A}\widetilde{X} = 0$.

  On définit alors $X = \begin{pmatrix} -L\widetilde{X} \\ \widetilde{X} \end{pmatrix} \in K^{p+2}$. *Ce vecteur est non nul.*

  On a alors

$$PAX = \begin{pmatrix} 1 & L \\ 0 & \widetilde{A} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -L\widetilde{X} \\ \widetilde{X} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -L\widetilde{X} + L\widetilde{X} \\ \widetilde{A}\widetilde{X} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0_{K^p} \end{pmatrix} = 0_{K^{p+1}}.$$

  En multipliant à gauche par P^{-1}, *on en déduit* $AX = 0_{K^{p+1}}$.

Dans les deux cas, on a trouvé un vecteur non nul dans $\ker A$, *ce qui montre* $P(p+1)$, *et clôt la récurrence.*

► *Traitons maintenant le cas général : soit* $q > p \geqslant 1$ *deux entiers et* $A \in M_{p,q}(K)$. *Si* $q = p+1$, *on a déjà fini, donc on suppose* $q \geqslant p+2$ *dans la suite.*

On peut découper A *par blocs :* $A = \begin{pmatrix} \widetilde{A} & B \end{pmatrix}$ *pour* $\widetilde{A} \in M_{p,p+1}(K)$ *et* $B \in M_{p,q-p-1}(K)$. *D'après le cas précédent, on peut trouver* $\widetilde{X} \in K^{p+1}$ *non nul tel que* $\widetilde{A}\widetilde{X} = 0_{K^p}$. *On vérifie alors sans difficulté que le vecteur non nul* $X = \begin{pmatrix} \widetilde{X} \\ 0 \end{pmatrix} \in K^q$ *est dans le noyau de* A, *ce qui conclut.*

2. Soit $n \geqslant 1$ impair. Soit $A \in M_n(K)$ tel que

$$\forall i, j \in [\![1, n]\!], i + j \text{ pair} \Rightarrow [A]_{i,j} = 0.$$

Montrer que $A \notin GL_n(K)$.

Expliquons l'idée sur un exemple : on peut « extraire » de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a & 0 & b & 0 \\ c & 0 & d & 0 & e \\ 0 & f & 0 & g & 0 \\ h & 0 & i & 0 & j \\ 0 & k & 0 & \ell & 0 \end{pmatrix}$$

une matrice rectangulaire plus large que haute

$$R = \begin{pmatrix} c & d & e \\ h & i & j \end{pmatrix} \in M_{2,3}(K),$$

et la question précédente garantit l'existence d'un vecteur non nul $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ *dans le noyau (c'est-à-dire tel que* $cx + dy + ez = hx + iy + jz = 0$*).*

On a alors

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a & 0 & b & 0 \\ c & 0 & d & 0 & e \\ 0 & f & 0 & g & 0 \\ h & 0 & i & 0 & j \\ 0 & k & 0 & \ell & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ y \\ 0 \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ cx + dy + ez \\ 0 \\ hx + iy + jz \\ 0 \end{pmatrix} = 0_{\mathbb{K}^5},$$

ce qui exhibe un vecteur non nul de $\ker A$*, et montre du même coup sa non-inversibilité.*

Le cas général se traite de la même façon, avec un déluge de notations infernales que je nous épargne.

Problème. Trace de polynômes de matrices.

Dans tout l'énoncé, on fixe un entier $n \geqslant 2$.

On rappelle qu'étant donné un polynôme $P = \sum_{k=0}^{d} a_k X^k \in \mathbb{R}[X]$ et une matrice carrée $A \in M_n(\mathbb{R})$, on peut considérer la matrice $P(A) = \sum_{k=0}^{d} a_k A^k$. Par exemple, si $P = X^3 + 2X - 1$, on a $P(A) = A^3 + 2A - I_n$.

On pourra librement utiliser que les propriétés de l'évaluation des polynômes s'étendent à ce cadre. Notamment, pour $P, Q \in \mathbb{R}[X]$ et $A \in M_n(\mathbb{R})$, on a $(P+Q)(A) = P(A) + Q(A)$ et $(PQ)(A) = P(A)\,Q(A)$.

Le problème explore quelques thèmes (plus ou moins indépendants) reliés à la quantité $\operatorname{tr} P(A)$, pour $P \in \mathbb{R}[X]$ et $A \in M_n(\mathbb{R})$.

Partie I. Quelques généralités.

On rappelle que $S_n(\mathbb{R})$ désigne l'ensemble des matrices **symétriques**, c'est-à-dire égales à leur transposée.

1. Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$. Montrer $A\,A^T \in S_n(\mathbb{R})$

   On a $\left(A\,A^T\right)^T = (A^T)^T A^T = A\,A^T$, *donc* $A\,A^T \in S_n(\mathbb{R})$.

2. Soit $S \in S_n(\mathbb{R})$ et $P \in \mathbb{R}[X]$. Montrer que $P(S) \in S_n(\mathbb{R})$.

   ▸ *Pour tout* $k \in \mathbb{N}$, *notons* $A(k)$ *l'assertion « $S^k \in S_n(\mathbb{R})$. » Montrons* $\forall k \in \mathbb{N}, A(k)$ *par récurrence.*

   Initialisation. *On a* $S^0 = I_n \in S_n(\mathbb{R})$, *d'où* $A(0)$.

Hérédité. *Soit* $k \in \mathbb{N}$ *tel que* $A(k)$. *On a*

$$\left(S^{k+1}\right)^T = \left(S^k S\right)^T = S^T (S^k)^T \overset{*}{=} S S^k = S^{k+1},$$

donc $S^{k+1} \in S_n(\mathbb{R})$.

L'égalité astérisquée provient du caractère symétrique de S *et de l'assertion* $A(k)$.

Cela montre $A(k+1)$, *et clôt la récurrence.*

- *En écrivant* $P = \sum_{k=0}^{d} a_k X^k$, *on a* $P(S) = \sum_{k=0}^{d} a_k S^k$. *D'après le point précédent, on a* $S^k \in S_n(\mathbb{R})$ *pour tout* $k \in [\![0, d]\!]$.

  Par stabilité par combinaison linéaire de $S_n(\mathbb{R})$ *(ou, ce qui revient essentiellement au même, par linéarité de la transposition),* $P(S) \in S_n(\mathbb{R})$.

3. Soit $S \in S_n(\mathbb{R})$.
   (a) Montrer $\operatorname{tr}(S^2) \geqslant 0$.

   Un calcul direct montre que

   $$\operatorname{tr}(S^2) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{\ell=1}^{n} [S]_{k,\ell}[S]_{\ell,k} = \sum_{k=1}^{n} \sum_{\ell=1}^{n} [S]_{k,\ell}^2,$$

   la dernière étape provenant du caractère symétrique de S. *Somme de carrés, cette quantité est automatiquement positive.*

   (b) Dans quel cas a-t-on $\operatorname{tr}(S^2) = 0$?

   Supposons $\operatorname{tr}(S^2) = 0$. *Le calcul précédent montre que* $\sum_{1 \leqslant k,\ell \leqslant n} [S]_{k,\ell}^2 = 0$. *Comme tous les termes de cette somme sont positifs, cela force* $\forall k, \ell \in [\![1, n]\!], [S]_{k,\ell}^2 = 0$, *donc* $\forall k, \ell \in [\![1, n]\!], [S]_{k,\ell}^2 = 0$, *ce qui entraîne* $S = 0$.

   La réciproque étant claire, on a montré $\operatorname{tr}(S^2) = 0$ *si et seulement si* $S = 0$.

4. Soit $T \in T_n^+(\mathbb{R})$ une matrice dont les coefficients diagonaux sont $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ et $P \in \mathbb{R}[X]$.

   Montrer $\operatorname{tr} P(T) = \sum_{i=1}^{n} P(\lambda_i)$.

   Notons $P = \sum_{k=0}^{d} a_k X^k$.

   - *La propriété du cours sur les matrices triangulaires montre que* $T^2 = \begin{pmatrix} \lambda_1^2 & & & \\ & \lambda_2^2 & (*) & \\ & (0) & \ddots & \\ & & & \lambda_n^2 \end{pmatrix}$ *puis, par une récurrence immédiate, que* $\forall k \in \mathbb{N}, T^k = \begin{pmatrix} \lambda_1^k & & & \\ & \lambda_2^k & (*) & \\ & (0) & \ddots & \\ & & & \lambda_n^k \end{pmatrix}$.

   - *Ainsi,* $P(T) = \sum_{k=0}^{d} a_k T^k = \begin{pmatrix} P(\lambda_1) & & & \\ & P(\lambda_2) & (*) & \\ & (0) & \ddots & \\ & & & P(\lambda_n) \end{pmatrix}$, *ce qui entraîne* $\operatorname{tr} P(T) = \sum_{i=1}^{n} P(\lambda_i)$.

Partie II. Polynômes à trace positive.

Dans cette partie, on dira qu'un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ est **à valeurs positives** si $\forall x \in \mathbb{R}, P(x) \geqslant 0$.

On cherche à comparer cette propriété avec la propriété « de trace positive » $\forall A \in \mathscr{A}, \operatorname{tr} P(A) \geqslant 0$, pour divers ensembles $\mathscr{A}$ de matrices.

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Le cas constant n'ayant guère d'intérêt, on suppose dans la suite $\deg(P) \geqslant 1$.

5. **Cas triangulaire.** Montrer que P est à valeurs positives si et seulement si $\forall T \in T_n^+(\mathbb{R}), \operatorname{tr} P(T) \geqslant 0$.

   - *Si P est à valeurs positives, la question 4 entraîne directement que $\forall T \in T_n^+(\mathbb{R}), \operatorname{tr} P(T) \geqslant 0$.*
   - *Réciproquement, supposons $\forall T \in T_n^+(\mathbb{R}), \operatorname{tr} P(T) \geqslant 0$. Soit $x \in \mathbb{R}$. En appliquant la question 4 à la matrice (diagonale donc triangulaire) $T = x\, I_n$, on obtient $\operatorname{tr} P(T) = n\, P(x) \geqslant 0$, ce qui montre $P(x) \geqslant 0$, et conclut.*

6. **Cas général.** Dans cette question, $P \in \mathbb{R}[X]$ est un polynôme de degré $\geqslant 1$ quelconque.

   (a) Montrer $\forall y \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{C} : P(x) = y$.

   Comme le polynôme P est de degré $\geqslant 1$, on a $\deg\big(P - y\big) = \deg P \geqslant 1$. D'après le théorème de D'Alembert-Gauss, ce polynôme admet donc une racine complexe, ce qui conclut.

   (b) Montrer $\forall y \in \mathbb{R}, \exists B \in M_2(\mathbb{R}) : \operatorname{tr} P(B) = y$.

   Pour tout $z \in \mathbb{C}$, notons $S(z) = \begin{pmatrix} \operatorname{Ré} z & -\operatorname{Im} z \\ \operatorname{Im} z & \operatorname{Ré} z \end{pmatrix}$. On vérifie sans difficulté que

   $$\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}, S(z_1 + z_2) = S(z_1) + S(z_2) \qquad \text{et} \qquad S(z_1\, z_2) = S(z_1)\, S(z_2)$$

   (pour nous, c'était même la définition de l'addition et la multiplication dans $\mathbb{C}$).

   Par une récurrence immédiate, on en déduit

   $$\forall z \in \mathbb{C}, \forall k \in \mathbb{N}, S(z)^k = S(z^k)$$

   puis, par combinaison linéaire, que

   $$\forall P \in \mathbb{R}[X], P\big(S(z)\big) = S\big(P(z)\big).$$

   Soit maintenant $y \in \mathbb{R}$.

   D'après la question précédente, on peut trouver $x \in \mathbb{C}$ tel que $P(x) = \dfrac{y}{2}$.

   On en déduit que $P\big(S(x)\big) = S\left(\dfrac{y}{2}\right) = \dfrac{y}{2}\, I_2$, si bien qu'en posant $B = S(x) \in M_2(\mathbb{R})$, on a

   $$\operatorname{tr} P(B) = \operatorname{tr}\left(\frac{y}{2} I_2\right) = y.$$

   (c) Montrer $\exists A \in M_n(\mathbb{R}) : \operatorname{tr} P(A) < 0$.

   D'après la question précédente, on peut trouver $B \in M_2(\mathbb{R})$ telle que $\operatorname{tr} P(B) = -1 - (n-2)P(1)$.

   La matrice par blocs $A = \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & I_{n-2} \end{pmatrix}$ vérifie alors, par un calcul très proche de ceux déjà effectués

   $$P(A) = \begin{pmatrix} P(B) & 0 \\ 0 & P(I_{n-2}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P(B) & 0 \\ 0 & P(1)\, I_{n-2} \end{pmatrix} \text{ donc } \operatorname{tr} P(A) = \operatorname{tr} P(B) + (n-2)P(1) = -1,$$

   ce qui conclut.

7. **Cas symétrique.** Le but de cette question est de montrer que P est à valeurs positives si et seulement si $\forall \mathrm{S} \in \mathrm{S}_n(\mathbb{R}), \operatorname{tr} \mathrm{P}(\mathrm{S}) \geqslant 0$.

   (a) Démontrer que la condition $\forall \mathrm{S} \in \mathrm{S}_n(\mathbb{R}), \operatorname{tr} \mathrm{P}(\mathrm{S}) \geqslant 0$ entraîne que P est à valeurs positives.

   On procède comme dans la question 5 : pour tout $x \in \mathbb{R}$, la matrice $x\,\mathrm{I}_n$ est diagonale, donc symétrique.

   Dans la suite, on suppose P à valeurs positives et on va montrer $\forall \mathrm{S} \in \mathrm{S}_n(\mathbb{R}), \operatorname{tr} \mathrm{P}(\mathrm{S}) \geqslant 0$, en commençant par décomposer P en une somme $\mathrm{Q}_1^2 + \cdots + \mathrm{Q}_r^2$ de carrés de polynômes réels.

   On **admettra** pour cela le résultat suivant.

   Lemme. Tout polynôme à valeurs positives admet un minimum.

   (b) Montrer que si P admet une racine réelle $a \in \mathbb{R}$, alors la multiplicité $\mu_a(\mathrm{P})$ est paire.

   Soit $a \in \mathbb{R}$ une racine de P et $k = \mu_a(\mathrm{P})$. D'après le lemme de préparation, on peut trouver $\mathrm{P}_0 \in \mathbb{R}[\mathrm{X}]$ tel que $\mathrm{P}_0(a) \neq 0$ et $\mathrm{P} = (\mathrm{X}-a)^k \mathrm{P}_0$. Notons $\lambda = \mathrm{P}_0(a)$.

   Par continuité de la fonction polynomiale associée, on a $\mathrm{P}_0(x) \xrightarrow[x \to a]{} \lambda$, donc $x \mapsto \mathrm{P}_0(x)$ est du signe de λ au voisinage de a.

   Si k était impair, la fonction $x \mapsto (x-a)^k$ changerait de signe au voisinage de a, et il en irait donc de même de $x \mapsto \mathrm{P}(x)$, ce qui est exclu.

   On en déduit que $k = \mu_a(\mathrm{P})$ est pair.

   (c) En déduire (sans supposer que P possède une racine) l'existence de $\lambda \in \mathbb{R}_+$, de $a \in \mathbb{R}$ et de $\widetilde{\mathrm{P}} \in \mathbb{R}[\mathrm{X}]$ à valeurs positives tel que $\mathrm{P} = \lambda + (\mathrm{X}-a)^2 \widetilde{\mathrm{P}}$.

   D'après le résultat admis, la fonction $x \mapsto \mathrm{P}(x)$ admet un minimum : on peut donc trouver $a \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}, \mathrm{P}(x) \geqslant \mathrm{P}(a)$. Notons $\lambda = \mathrm{P}(a)$, qui est bien un élément de $\mathbb{R}_+$.

   Le polynôme $\mathrm{P} - \lambda$ est donc à valeurs positives, et il admet une racine en a. D'après la question précédente, la multiplicité $\mu_a(\mathrm{P}-\lambda)$ est donc paire (et > 0), donc elle est $\geqslant 2$. Ce polynôme est donc divisible par $(\mathrm{X}-a)^2$, ce qui permet de trouver $\widetilde{\mathrm{P}} \in \mathbb{R}[\mathrm{X}]$ tel que $\mathrm{P} - \lambda = (\mathrm{X}-a)^2 \widetilde{\mathrm{P}}$.

   Pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{a\}$, on a $\widetilde{\mathrm{P}}(x) = \dfrac{\mathrm{P}(x) - \lambda}{(x-a)^2} \geqslant 0$. Par continuité de la fonction polynomiale associée à $\widetilde{\mathrm{P}}$ on en déduit que $\widetilde{\mathrm{P}}(a)$ est également $\geqslant 0$, si bien que le polynôme $\widetilde{\mathrm{P}}$ est encore à valeurs positives.

   (d) Montrer qu'il existe $r \in \mathbb{N}^*$ et $\mathrm{Q}_1, \ldots, \mathrm{Q}_r \in \mathbb{R}[\mathrm{X}]$ tels que $\mathrm{P} = \mathrm{Q}_1^2 + \cdots + \mathrm{Q}_r^2$.

   On procède par récurrence sur le degré.

   Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $\mathrm{A}(n)$ l'assertion « pour tout $\mathrm{P} \in \mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$ à valeurs positives, il existe $r \in \mathbb{N}^*$ et $\mathrm{Q}_1, \ldots, \mathrm{Q}_r \in \mathbb{R}[\mathrm{X}]$ tels que $\mathrm{P} = \mathrm{Q}_1^2 + \cdots + \mathrm{Q}_r^2$ ».

   Montrons $\forall n \in \mathbb{N}, \mathrm{A}(n)$ par récurrence.

   Initialisation. *Soit $\mathrm{P} \in \mathbb{R}_0[\mathrm{X}]$ à valeurs positives.*

   Le polynôme P est constant, donc $\mathrm{P} = \mathrm{P}(0) \geqslant 0$. En notant Q_1 le polynôme constant $\sqrt{\mathrm{P}(0)}$, on peut écrire $\mathrm{P} = \mathrm{Q}_1^2$, ce qui montre $\mathrm{A}(0)$ (avec $r = 1$).

   Hérédité. *Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathrm{A}(n)$. Soit $\mathrm{P} \in \mathbb{R}_{n+1}[\mathrm{X}]$ à valeurs positives.*

   D'après la question précédente, on peut trouver $\lambda \in \mathbb{R}_+$, $a \in \mathbb{R}$ et $\widetilde{\mathrm{P}} \in \mathbb{R}[\mathrm{X}]$ à valeurs positives tels que $\mathrm{P} = (\mathrm{X}-a)^2 \widetilde{\mathrm{P}} + \lambda$.

- *Si* $\widetilde{P}$ *est nul, le polynôme* P *est constant et on sait le décomposer en somme de carrés, comme dans l'initialisation.*
- *Sinon, on a* $\deg\left((X-a)^2\widetilde{P}\right) = 2+\deg\widetilde{P} \geqslant 2 > 0$*, donc* $\deg P = 2+\deg\widetilde{P}$*, ce qui entraîne (largement)* $\deg\widetilde{P} \leqslant n$*. Comme* $\widetilde{P}$ *est à valeurs positives, on peut appliquer* $A(n)$ *et trouver* $r \in \mathbb{N}^*$ *et* $\widetilde{Q}_1, \dots, \widetilde{Q}_r \in \mathbb{R}[X]$ *tels que* $\widetilde{P} = \sum_{i=1}^{r} \widetilde{Q}_i^2$.

  En posant $Q_i = (X-a)\widetilde{Q}_i$ *pour tout* $i \in [\![1, r]\!]$ *et* $Q_{r+1} = \sqrt{\lambda}$*, on obtient ainsi*

$$P = (X-a)^2 \sum_{i=1}^{r} \widetilde{Q}_i^2 + \lambda = \sum_{i=1}^{r} Q_i^2 + Q_{r+1}^2.$$

Les deux cas ayant été traités, on a montré $A(n+1)$*, ce qui clôt la récurrence.*

(e) Conclure.

D'après la question précédente, on peut trouver $r \in \mathbb{N}^*$ *et* $Q_1, \dots, Q_r \in \mathbb{R}[X]$ *tels que* $P = \sum_{i=1}^{r} Q_i^2$.

Soit maintenant $S \in S_n(\mathbb{R})$.

Remarquons que grâce à la question 2, on a $\forall i \in [\![1, r]\!], Q_i(S) \in S_n(\mathbb{R})$.

Ainsi,

$$\operatorname{tr} P(S) = \operatorname{tr}\left(\sum_{i=1}^{r} Q_i(S)^2\right) = \sum_{i=1}^{r} \underbrace{\operatorname{tr}\left(Q_i(S)^2\right)}_{\geqslant 0} \geqslant 0,$$

d'après la question 3.

Partie III. Matrices symétriques dont une puissance vaut I_n.

Soit $S \in S_n(\mathbb{R})$.

Le but de cette partie est de montrer que s'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $S^p = I_n$, alors $S^2 = I_n$.

8. Donner un exemple de matrice symétrique de taille $n \times n$ différente de I_n et dont le carré est I_n.

   La matrice $-I_n$ *convient clairement.*

9. Dans cette question, on suppose qu'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ **impair** tel que $S^p = I_n$, et on veut montrer que $S = I_n$.

   (a) Montrer que la suite $(\tau_k)_{k\in\mathbb{N}} = \operatorname{tr}(S^k)$ est p-périodique, c'est-à-dire que $\forall n \in \mathbb{N}, \tau_{n+p} = \tau_n$.

   Soit $n \in \mathbb{N}$*. On a* $S^{n+p} = S^n S^p = S^n$*, donc on obtient* $\tau_{n+p} = \tau_n$ *en passant à la trace.*

   (b) En déduire qu'il existe un entier $k \in \mathbb{N}$ telle que τ_{2k+1} soit le maximum de la suite $(\tau_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

   Par périodicité, la suite $(\tau_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est à valeurs dans l'ensemble fini* $\{\tau_0, \dots, \tau_{p-1}\}$*, donc elle admet un maximum, à savoir* $\max(\tau_0, \dots, \tau_{p-1})$ *: on peut trouver* $m \in \mathbb{N}$ *tel que* $\forall n \in \mathbb{N}, \tau_n \leqslant \tau_m$.

   - *Si* m *est impair, on a fini : on peut trouver* $k \in \mathbb{N}$ *tel que* $m = 2k+1$.
   - *Si* m *est pair, on profite de la* p*-périodicité pour remarquer que* $\tau_m = \tau_{m+p}$ *: la suite* $(\tau_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *atteint également son maximum en* $n = m+p$*, qui est maintenant un nombre impair. On peut donc trouver* $k \in \mathbb{N}$ *tel que* $m+p = 2k+1$.

(c) Calculer $\operatorname{tr}\big((S^{k+1}-S^k)^2\big)$, et conclure.

- *En développant le carré (notons que S^{k+1} et S^k commutent) et par linéarité de la trace,*

$$\operatorname{tr}\big((S^{k+1}-S^k)^2\big) = \operatorname{tr}(S^{2k+2}) - 2\operatorname{tr}(S^{2k+1}) + \operatorname{tr}(S^{2k}) = \tau_{2k+2} - 2\tau_{2k+1} + \tau_{2k}.$$

  La maximalité de τ_{2k+1} entraîne que cette trace est négative.

  Or, la question 2 montre que la matrice $S^{k+1}-S^k$ est symétrique. D'après la question 3, on en déduit que la trace de son carré est positive. Le calcul précédent montre donc que cette trace est nulle.

  Toujours d'après la question 3, on a donc $S^{k+1}-S^k=0$, c'est-à-dire $S^{k+1}=S^k$.
- *Par ailleurs, la relation $I_n = S^p = S\,S^{p-1}$ montre que S est inversible (d'inverse S^{p-1}, mais peu importe). Par stabilité par produit de $GL_n(K)$, on en déduit que $S^k \in GL_n(K)$.*

  En multipliant par l'inverse de cette matrice, la relation $S^{k+1}=S^k$ donne $S=I_n$.

10. Montrer que si $S^4=I_n$, alors $S^2=I_n$.

Supposons $S^4=I_n$.

On peut utiliser la même idée que dans la question précédente, en remplaçant les différences de puissances successives par des différences « à deux pas d'écart ». Une façon percutante de rédiger est la suivante : on a d'après la question 3

$$\begin{aligned} 0 &\leqslant \operatorname{tr}\big((S^2-I_n)^2\big) + \operatorname{tr}\big((S^3-S)^2\big) \\ &\leqslant \big(\operatorname{tr}(S^4) - 2\operatorname{tr}(S^2) + \operatorname{tr}(I_n)\big) + \big(\operatorname{tr}(S^6) - 2\operatorname{tr}(S^4) + \operatorname{tr}(S^2)\big) = 0, \end{aligned}$$

car $S^4=I_n$ et (donc) $S^6=S^2$.

Toujours grâce à la question 3, on en déduit $S^2-I_n=S^3-S=0$, ce qui conclut.

11. Montrer que s'il existe $p\in\mathbb{N}^*$ tel que $S^p=I_n$, alors $S^2=I_n$.

Supposons qu'il existe $p\in\mathbb{N}^*$ tel que $S^p=I_n$. On peut même supposer cet entier p minimal pour cette propriété.

On peut alors écrire $p=2^k\,m$ pour un certain entier $k\in\mathbb{N}$ et un certain entier impair $m\in\mathbb{N}^*$.

- *D'après la question 2, la matrice $T=S^{2^k}$ est symétrique, et elle vérifie $T^m=S^{2^k\,m}=S^p=I_n$.*

  En lui appliquant la question 9, on en déduit que $T=I_n$, c'est-à-dire que $S^{2^k}=I_n$.

  Les inégalités $2^k\leqslant p$ (évidente par définition de k et m) et $p\leqslant 2^k$ (provenant de la minimalité de p) montrent que $p=2^k$.
- *Supposons maintenant par l'absurde que $k\geqslant 2$. La matrice $T=S^{2^{k-2}}$, toujours symétrique d'après la question 2, vérifie $T^4=I_n$.*

  D'après la question 10, on en déduit $T^2=I_n$, c'est-à-dire $S^{2^{k-1}}=I_n$. Comme $2^{k-1}<2^k=p$, cela contredit la minimalité de p.

  On a donc nécessairement $k\leqslant 1$, c'est-à-dire $p=1$ ou $p=2$. Dans les deux cas, $S^2=I_n$.

Remarque. *Il était aussi possible (et sans doute plus facile, même si c'est – je trouve – moins élégant) de rédiger une récurrence forte pour montrer $\forall p\in\mathbb{N}^*, S^p=I_n \Rightarrow S^2=I_n$, en utilisant dans la phase d'hérédité les questions 9 et 10.*

12. **Application.** Déterminer toutes les matrices $A \in M_n(\mathbb{R})$ telles que $AA^T A = I_n$.

On procède par analyse et synthèse.

Analyse. *Soit* $A \in M_n(\mathbb{R})$ *telle que* $AA^T A = I_n$.

On obtient $A^T AA^T = I_n$ *en transposant, puis* $\underbrace{AA^T AA^T AA^T}_{=(AA^T)^3} = I_n$ *en multipliant les deux relations.*

La matrice (symétrique d'après la question 1) $S = AA^T$ *vérifie donc* $S^3 = I_n$. *D'après la question 9, elle doit donc valoir* I_n. *

La relation $A^T AA^T = I_n$ *se simplifie alors et donne* $A^T = I_n$, *d'où* $A = I_n$ *en retransposant.*

Synthèse. *Clairement* $A = I_n$ *vérifie* $AA^T A = I_n$.

In fine, *il n'y a qu'une matrice* $A \in M_n(\mathbb{R})$ *vérifiant* $AA^T A = I_n$, *et il s'agit de la matrice identité.*

*. Il existe en fait pas mal de matrices $A \in M_n(\mathbb{R})$ dont la transposée est égale à l'inverse, et elles ont même un nom : ce sont les *matrices orthogonales*, qui forment le *groupe orthogonal* $O_n(\mathbb{R})$. Clairement, il y a déjà toutes les matrices diagonales $\operatorname{diag}(\pm 1, \dots, \pm 1)$, mais c'est en fait une goutte d'eau dans l'océan. On vérifie par exemple que le « nombre complexe de module 1 » $S(e^{i\theta}) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ est de ce type, ce qui n'est pas très étonnnant car, pour une matrice $A = S(z)$, la relation $AA^T = I_2$ signifie exactement $z\bar{z} = 1$.