Cinquième composition de mathématiques

Durée : *quatre heures.*

Les documents, calculatrices, etc. sont ***interdits****.*

Sauf mention explicite de l'énoncé, toutes vos affirmations doivent être justifiées.

Consignes générales de présentation

La présentation de la copie est prise en compte dans l'évaluation.

- *Ne composez pas sur la première page, ce qui me permettra d'écrire mes commentaires.*
- *Merci* $\boxed{\textit{d'encadrer}}$ *ou de* <u>*souligner*</u> *vos résultats.*
- *Numérotez vos copies doubles, et rendez-les dans l'ordre, la première servant de chemise pour les suivantes, qui ne seront pas imbriquées les unes dans les autres.*
- *Les parties trop difficiles à lire de votre copie ne seront pas lues.*

Exercice 1. Questions de cours.

1. Énoncer précisément la formule du binôme de Newton pour des matrices.
2. Énoncer précisément le critère nucléaire d'inversibilité.
3. Énoncer la règle de multiplication des matrices élémentaires. Pour simplifier, contentez-vous de le faire pour des matrices carrées de format $n \times n$.
4. La matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ est-elle inversible ?

   Si oui, préciser son inverse.

Exercice 2. Quelques calculs.

Les deux questions de cet exercice sont indépendantes.

1. Soit $a \in \mathbb{C}$.

   En fonction des valeurs de ce paramètre, résoudre le système suivant, d'inconnue $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^3$:

$$\begin{cases} x + y - z = 1 \\ 3x + 2y + 2z = 2 \\ 2x + y + 3z = a. \end{cases}$$

2. (a) Calculer les puissances de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

   (b) En déduire les puissances de $B = \begin{pmatrix} 8 & -1 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}$.

Exercice 3. Un ensemble de matrices non inversibles.

Cet exercice est plus difficile que les deux précédents : il vaut sans doute mieux aller jeter un œil au problème avant de s'y frotter.

Dans cet exercice, K désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1. Montrer qu'étant donné deux entiers $q > p \geqslant 1$, toute matrice $R \in M_{p,q}(K)$ vérifie $\ker R \neq \{0\}$.
2. Soit $n \geqslant 1$ impair. Soit $A \in M_n(K)$ tel que

$$\forall i, j \in [\![1, n]\!], i + j \text{ pair} \Rightarrow [A]_{i,j} = 0.$$

   Montrer que $A \notin GL_n(K)$.

Problème. Trace de polynômes de matrices.

Dans tout l'énoncé, on fixe un entier $n \geqslant 2$.

On rappelle qu'étant donné un polynôme $P = \sum_{k=0}^{d} a_k X^k \in \mathbb{R}[X]$ et une matrice carrée $A \in M_n(\mathbb{R})$, on peut considérer la matrice $P(A) = \sum_{k=0}^{d} a_k A^k$. Par exemple, si $P = X^3 + 2X - 1$, on a $P(A) = A^3 + 2A - I_n$.

On pourra librement utiliser que les propriétés de l'évaluation des polynômes s'étendent à ce cadre. Notamment, pour $P, Q \in \mathbb{R}[X]$ et $A \in M_n(\mathbb{R})$, on a $(P+Q)(A) = P(A) + Q(A)$ et $(PQ)(A) = P(A)\,Q(A)$.

Le problème explore quelques thèmes (plus ou moins indépendants) reliés à la quantité $\operatorname{tr} P(A)$, pour $P \in \mathbb{R}[X]$ et $A \in M_n(\mathbb{R})$.

La première partie peut être utile pour les deux suivantes, qui sont indépendantes l'une de l'autre.

Partie I. Quelques généralités.

On rappelle que $S_n(\mathbb{R})$ désigne l'ensemble des matrices **symétriques**, c'est-à-dire égales à leur transposée.

1. Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$. Montrer $A\,A^T \in S_n(\mathbb{R})$
2. Soit $S \in S_n(\mathbb{R})$ et $P \in \mathbb{R}[X]$. Montrer que $P(S) \in S_n(\mathbb{R})$.
3. Soit $S \in S_n(\mathbb{R})$.
   (a) Montrer $\operatorname{tr}(S^2) \geqslant 0$.
   (b) Dans quel cas a-t-on $\operatorname{tr}(S^2) = 0$?
4. Soit $T \in T_n^+(\mathbb{R})$ une matrice dont les coefficients diagonaux sont $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ et $P \in \mathbb{R}[X]$.

   Montrer $\operatorname{tr} P(T) = \sum_{i=1}^{n} P(\lambda_i)$.

Partie II. Polynômes à trace positive.

Dans cette partie, on dira qu'un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ est **à valeurs positives** si $\forall x \in \mathbb{R}, P(x) \geqslant 0$.

On cherche à comparer cette propriété avec la propriété « de trace positive » $\forall A \in \mathscr{A}, \operatorname{tr} P(A) \geqslant 0$, pour divers ensembles $\mathscr{A}$ de matrices.

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Le cas constant n'ayant guère d'intérêt, on suppose dans la suite $\deg(P) \geqslant 1$.

Les trois questions sont indépendantes.

5. **Cas triangulaire.** Montrer que P est à valeurs positives si et seulement si $\forall T \in T_n^+(\mathbb{R}), \operatorname{tr} P(T) \geqslant 0$.
6. **Cas général.** Dans cette question, $P \in \mathbb{R}[X]$ est un polynôme de degré $\geqslant 1$ quelconque.
   (a) Montrer $\forall y \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{C} : P(x) = y$.
   (b) Montrer $\forall y \in \mathbb{R}, \exists B \in M_2(\mathbb{R}) : \operatorname{tr} P(B) = y$.
   (c) Montrer $\exists A \in M_n(\mathbb{R}) : \operatorname{tr} P(A) < 0$.
7. **Cas symétrique.** Le but de cette question est de montrer que P est à valeurs positives si et seulement si $\forall S \in S_n(\mathbb{R}), \operatorname{tr} P(S) \geqslant 0$.

   (a) Démontrer que la condition $\forall S \in S_n(\mathbb{R}), \operatorname{tr} P(S) \geqslant 0$ entraîne que P est à valeurs positives.

   Dans la suite, on suppose P à valeurs positives et on va montrer $\forall S \in S_n(\mathbb{R}), \operatorname{tr} P(S) \geqslant 0$, en commençant par décomposer P en une somme $Q_1^2 + \cdots + Q_r^2$ de carrés de polynômes réels. *

   On **admettra** pour cela le résultat suivant. †

   Lemme. Tout polynôme à valeurs positives admet un minimum.

   (b) Montrer que si P admet une racine réelle $a \in \mathbb{R}$, alors la multiplicité $\mu_a(P)$ est paire.
   (c) En déduire (sans supposer que P possède une racine) l'existence de $\lambda \in \mathbb{R}_+$, de $a \in \mathbb{R}$ et de $\widetilde{P} \in \mathbb{R}[X]$ à valeurs positives tel que $P = \lambda + (X-a)^2 \widetilde{P}$.
   (d) Montrer qu'il existe $r \in \mathbb{N}^*$ et $Q_1, \dots, Q_r \in \mathbb{R}[X]$ tels que $P = Q_1^2 + \cdots + Q_r^2$.
   (e) Conclure.

Partie III. Matrices symétriques dont une puissance vaut I_n.

Soit $S \in S_n(\mathbb{R})$.

Le but de cette partie est de montrer que s'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $S^p = I_n$, alors $S^2 = I_n$.

8. Donner un exemple de matrice symétrique de taille $n \times n$ différente de I_n et dont le carré est I_n.
9. Dans cette question, on suppose qu'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ **impair** tel que $S^p = I_n$, et on veut montrer que $S = I_n$.

   (a) Montrer que la suite $(\tau_k)_{k\in\mathbb{N}} = \operatorname{tr}(S^k)$ est p-périodique, c'est-à-dire que $\forall n \in \mathbb{N}, \tau_{n+p} = \tau_n$.
   (b) En déduire qu'il existe un entier $k \in \mathbb{N}$ telle que τ_{2k+1} soit le maximum de la suite $(\tau_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   (c) Calculer $\operatorname{tr}\big((S^{k+1} - S^k)^2\big)$, et conclure.

10. Montrer que si $S^4 = I_n$, alors $S^2 = I_n$.
11. Montrer que s'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $S^p = I_n$, alors $S^2 = I_n$.
12. **Application.** Déterminer toutes les matrices $A \in M_n(\mathbb{R})$ telles que $AA^TA = I_n$.

*. Nous avons vu en TD que P est même la somme de deux carrés. Le sujet propose une démonstration d'un résultat plus faible, et il vous est demandé de suivre son raisonnement, plutôt que de redémontrer le résultat vu en TD.

†. Si vous avez fini tout le sujet, vous pouvez rédiger une démonstration de ce résultat : c'est largement faisable, mais ce sera tellement plus clair dans un mois que je préfère l'admettre ici.