Septième composition de mathématiques [corrigé]

Exercice 1. Interro de calcul du vendredi.

1. Calculer un développement asymptotique à deux termes de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} = \big((n+1)^{5/3} - n^{5/3}\big)_{n\in\mathbb{N}}$.

   Comme $\binom{5/3}{2} = \frac{(5/3)(2/3)}{2} = \frac{5}{9}$, *on a* $(1+h)^{5/3} = 1 + \frac{5}{3}h + \frac{5}{9}h^2 + o(h^2)$. *On en déduit*

$$\begin{aligned} u_n &= n^{5/3}\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^{5/3} - 1\right] \\ &= n^{5/3}\left[\left(1 + \frac{5}{3}n^{-1} + \frac{5}{9}n^{-2} + o(n^{-2})\right) - 1\right] \\ &= n^{5/3}\left[\frac{5}{3}n^{-1} + \frac{5}{9}n^{-2} + o(n^{-2})\right] \\ &= \frac{5}{3}n^{2/3} + \frac{5}{9}n^{-1/3} + o(n^{-1/3}). \end{aligned}$$

2. En déduire un équivalent de $\big(\exp(u_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$.

   Le développement asymptotique ci-dessus donne $u_n = \frac{5}{3}n^{2/3} + o(1)$, *donc* $\exp(u_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \exp\left(\frac{5}{3}n^{2/3}\right)$.

Exercice 2

Soit E un espace vectoriel et $u \in \mathscr{L}(E)$ tel que $u^2 = u^3$.

1. Montrer que si $\ker(u) + \mathrm{im}(u) = E$, alors u est un projecteur.

   Supposons $\ker(u) + \mathrm{im}(u) = E$.

   On va montrer $u^2 = u$ *c'est-à-dire* $\forall x \in E, u^2(x) = u(x)$.

   Soit $x \in E$. *On peut trouver* $x_0 \in \ker(u)$ *et* $x_1 \in \mathrm{im}(u)$ *tels que* $x = x_0 + x_1$.

   - *On a* $u(x_0) = 0_E$, *donc* $u^2(x_0) = 0_E = u(x_0)$.
   - *On peut trouver* $z \in E$ *tel que* $x_1 = u(z)$. *On a alors* $u^2(x_1) = u^3(z) = u^2(z) = u(x_1)$.

   En rassemblant les composantes, on a bien

$$u^2(x) = u^2(x_0) + u^2(x_1) = u(x_0) + u(x_1) = u(x),$$

   ce qui conclut.

2. Montrer que $\mathrm{im}(u) = \mathrm{im}(u^2) \oplus \big(\ker(u) \cap \mathrm{im}(u)\big)$.

   Somme directe. *Soit* $y \in \mathrm{im}(u^2) \cap \big(\ker(u) \cap \mathrm{im}(u)\big)$.

   Comme $y \in \mathrm{im}(u^2)$, *on peut trouver* $z \in E$ *tel que* $y = u^2(z)$. *Comme* $y \in \ker(u)$, *on a par ailleurs* $u(z) = 0$, *c'est-à-dire* $u^3(z) = 0_E$.

   L'hypothèse $u^2 = u^3$ *donne donc* $y = u^2(z) = u^3(z) = 0_E$.

Inclusion directe. *Soit* $y \in \operatorname{im}(u)$. *On peut donc trouver* $x \in E$ *tel que* $y = u(x)$.

La condition $u^2 = u^3$ *donne en particulier* $u^2(x) = u^3(x)$, *c'est-à-dire que* $u(x)$ *et* $u^2(x)$ *ont la même image par* u. *On en déduit que* $u(x) - u^2(x) \in \ker(u)$.

Considérons alors la décomposition

$$y = u(x) = u^2(x) + \underbrace{\big(u(x) - u^2(x)\big)}_{=:y_0}.$$

On vient de dire que $y_0 \in \ker(u)$ *et son expression montre qu'il est également élément de* $\operatorname{im}(u)$, *si bien que* $y_0 \in \ker(u) \cap \operatorname{im}(u)$.

Comme il est en outre clair que $u^2(x) \in \operatorname{im}(u^2)$, *on a montré* $\operatorname{im}(u) \subseteq \operatorname{im}(u^2) \oplus \big(\ker(u) \cap \operatorname{im}(u)\big)$.

Inclusion réciproque. *L'inclusion* $\ker(u) \cap \operatorname{im}(u) \subseteq \operatorname{im}(u)$ *est automatique.*

Soit $y \in \operatorname{im}(u^2)$. *On peut trouver* $x \in E$ *tel que* $y = u^2(x) = u\big(u(x)\big)$, *ce qui montre* $y \in \operatorname{im}(u)$. *Ainsi,** $\operatorname{im}(u^2) \subseteq \operatorname{im}(u)$.

On en déduit $\operatorname{im}(u^2) + \big(\ker(u) \cap \operatorname{im}(u)\big) \subseteq \operatorname{im}(u)$.

Exercice 3

On considère la suite récurrente $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = \dfrac{1}{3}$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 4u_n\,(1 - u_n)$.

Montrer que u diverge.

- *Remarquons (même si ça n'est à vrai dire pas essentiel pour la démonstration) que le segment* $[0,1]$ *est stable sous l'itératrice* $f : x \mapsto 4x(1-x)$, *si bien que la suite* u *est bornée : sa divergence est donc due à un phénomène « d'hésitation ».*
- *Notons que l'itératrice* f *est polynomiale donc lisse. En résolvant une équation du second degré, on voit qu'elle possède deux points fixes, à savoir* 0 *et* $\dfrac{3}{4}$. *De manière cruciale,* $f'(0) = 4$ *et* $f'\left(\dfrac{3}{4}\right) = -2$, *deux nombres de valeur absolue* > 1.
- *Supposons par l'absurde que la suite* u *converge vers une limite* $\ell \in \mathbb{R}$. *On répète l'argument usuel : par continuité de* f *en* ℓ, $u_{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(\ell)$.

  Mais $(u_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ *est une suite extraite de* u *donc elle doit converger également vers* ℓ. *Par unicité de la limite,* $f(\ell) = \ell$, *c'est-à-dire* $\ell = 0$ *ou* $\ell = \dfrac{3}{4}$.
- *On va montrer par l'absurde que la suite* u *prend deux fois de suite la même valeur*†. *Supposons par l'absurde (c'est donc une démonstration par l'absurde dans une démonstration par l'absurde, attention les yeux) que* $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} \neq u_n$.

  Pour tout $n \in \mathbb{N}$, *on peut alors appliquer le théorème des accroissements finis sur l'intervalle ouvert joignant* u_n *à* u_{n+1} *: la fonction* f *étant lisse, elle est notamment dérivable sur cet intervalle ouvert et continue sur son adhérence, si bien que l'on peut trouver* ξ_n *compris strictement entre* u_n *et* u_{n+1} *tel que*

  $$\frac{f(u_{n+1}) - f(u_n)}{u_{n+1} - u_n} = f'(\xi_n).$$

  D'après le théorème des gendarmes, on a $\xi_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$, *si bien que, par continuité de* f',

  $$\frac{u_{n+2} - u_{n+1}}{u_{n+1} - u_n} = \frac{f(u_{n+1}) - f(u_n)}{u_{n+1} - u_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} f'(\ell) \qquad \textit{donc} \qquad \frac{|u_{n+2} - u_{n+1}|}{|u_{n+1} - u_n|} \xrightarrow[n\to+\infty]{} |f'(\ell)| > 1.$$

*. De manière générale, les inclusions $\ker(f) \subseteq \ker(g \circ f)$ et $\operatorname{im}(g \circ f) \subseteq \operatorname{im}(g)$ sont presque automatiques...

†. Commme il s'agit d'une suite récurrente, à partir de cette répétition, la suite u sera stationnaire. Mais il se trouve que cet argument – complètement général pour une suite récurrente qui souhaite converger vers un point fixe répulsif – n'est pas nécessaire ici car on va directement contredire la propriété énoncée.

Ainsi, la suite de quotients $\left(\dfrac{|u_{n+2}-u_{n+1}|}{|u_{n+1}-u_n|}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *est* >1 *à partir d'un certain rang.*

La suite $(|u_{n+1}-u_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ *est donc strictement croissante à partir d'un certain rang, ce qui constitue une contradiction car cette suite doit tendre vers* $|\ell-\ell|=0$.

- *Pour conclure notre démonstration, montrons que la suite* u *ne peut pas prendre deux fois la même valeur, en utilisant spécifiquement la valeur initiale* $u_0=\dfrac{1}{3}$. *Il s'agit en fait d'un argument arithmétique : la suite* u *est une suite à valeurs rationnelles dont les dénominateurs vont « exploser ».*

  Pour tout $n\in\mathbb{N}$, *notons* $P(n)$ *l'assertion « il existe un entier* a *non divisible par 3 tel que* $u_n=\dfrac{a}{3^{2^n}}$ *». Montrons* $\forall n\in\mathbb{N}, P(n)$ *par récurrence.*

  Initialisation. $u_0=\dfrac{1}{3}$ *donc* $a=1$ *convient.*

  Hérédité. *Soit* $n\in\mathbb{N}^*$ *tel que* $P(n)$. *On peut donc trouver* $a\in\mathbb{Z}$ *non divisible par 3 tel que* $u_n=\dfrac{a}{3^{2^n}}$.
  On en déduit

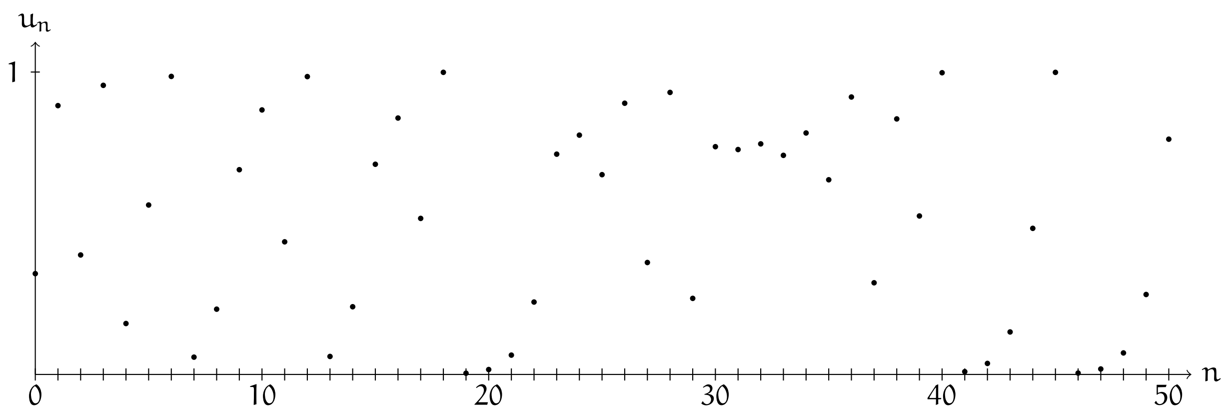
$$u_{n+1}=4\times\frac{a}{3^{2^n}}\times\left(1-\frac{a}{3^{2^n}}\right)=\frac{4a\,(3^{2^n}-a)}{(3^{2^n})^2}=\frac{4a\,(3^{2^n}-a)}{3^{2\times 2^n}}=\frac{b}{3^{2^{n+1}}},$$

  où l'on a posé $b=4a(3^{2^n}-a)$, *qui est bien un entier.*

  Il suffit alors de remarquer que $b\equiv -a^2 \pmod 3$ *pour conclure :* a *n'étant pas multiple de 3, on a* $a\equiv\pm1 \pmod 3$, *donc* $b\equiv -1 \pmod 3$ *et cet entier n'est pas multiple de 3.*

  Cela démontre $P(n+1)$, *et clôt la récurrence.*

  On a ainsi démontré que sous leur forme irréductible, les rationnels u_n *avaient des dénominateurs distincts. Cela montre que la suite* u *ne prend pas deux fois la même valeur, et conclut enfin notre démonstration par l'absurde.*



Le graphe (chaotique) de la suite u.

Problème A. Théorème de Posner pour $\mathrm{M}_2(\mathrm{K})$.

Dans tout ce problème, K désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, et toutes les notions d'algèbre linéaire sont à comprendre avec K comme corps des scalaires.

On rappelle qu'une matrice est dite *scalaire* si et seulement si elle appartient à $\mathrm{Vect}(\mathrm{I}_2)$.

Partie I. Généralités sur le commutant.

Étant donné $\mathrm{A} \in \mathrm{M}_2(\mathrm{K})$, on définit

- $\mathscr{V}(\mathrm{A}) = \mathrm{Vect}(\mathrm{I}_2, \mathrm{A})$;
- son *commutant* $\mathscr{C}(\mathrm{A}) = \{\mathrm{B} \in \mathrm{M}_2(\mathrm{K}) \mid \mathrm{AB} = \mathrm{BA}\}$.

1. Soit $\mathrm{A} \in \mathrm{M}_2(\mathrm{K})$.
   (a) Montrer que $\mathscr{V}(\mathrm{A})$ et $\mathscr{C}(\mathrm{A})$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathrm{M}_2(\mathrm{K})$.

   - *Déjà,* $\mathscr{V}(\mathrm{A})$ *est automatiquement un sous-espace vectoriel de* $\mathrm{M}_2(\mathrm{K})$*, en tant que sous-espace vectoriel engendré par une famille.*
   - *On peut vérifier facilement les trois axiomes de sous-espace vectoriel, mais il est plus élégant de remarquer que* $\mathscr{C}(\mathrm{A})$ *est le noyau de l'application linéaire* $\mathrm{L_A} - \mathrm{R_A} : \begin{cases} \mathrm{M}_2(\mathrm{K}) \to \mathrm{M}_2(\mathrm{K}) \\ \mathrm{B} \mapsto \mathrm{AB} - \mathrm{BA}. \end{cases}$

   (b) Montrer que $\mathscr{V}(\mathrm{A}) \subseteq \mathscr{C}(\mathrm{A})$.

   On a clairement I_2 *et* $\mathrm{A} \in \mathscr{C}(\mathrm{A})$*, et on conclut par stabilité par combinaison linéaire.*

2. Soit $\mathrm{A} \in \mathrm{M}_2(\mathrm{K})$.
   (a) Calculer $\mathrm{A}^2 - \mathrm{tr}(\mathrm{A})\,\mathrm{A}$.

   En écrivant $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$*, on obtient* $\mathrm{A}^2 - \mathrm{tr}(\mathrm{A})\,\mathrm{A} = \begin{pmatrix} bc - ad & 0 \\ 0 & bc - ad \end{pmatrix} = -\,\mathrm{d\acute{e}t}(\mathrm{A})\,\mathrm{I}_2$.

   Remarque. *Cette relation magique* $\mathrm{A}^2 - \mathrm{tr}(\mathrm{A})\mathrm{A} + \mathrm{d\acute{e}t}(\mathrm{A})\mathrm{I}_2 = 0_{\mathrm{M}_2(\mathrm{K})}$ *est un cas particulier du* théorème de Cayley-Hamilton *(dû à Frobenius...), que vous verrez en deuxième année.*

   (b) En déduire que $\mathscr{V}(\mathrm{A})$ est stable par produit.

   Soit $\mathrm{M}, \mathrm{N} \in \mathscr{V}(\mathrm{A})$*. On peut donc trouver* $\lambda, \mu, \alpha, \beta \in \mathrm{K}$ *tels que* $\mathrm{M} = \lambda \mathrm{I}_2 + \alpha \mathrm{A}$ *et* $\mathrm{N} = \mu \mathrm{I}_2 + \beta \mathrm{A}$.

   On en déduit

$$\mathrm{MN} = \underbrace{\lambda\mu \mathrm{I}_2 + (\lambda\beta + \mu\alpha)\mathrm{A}}_{\in \mathscr{V}(\mathrm{A})} + \alpha\beta \mathrm{A}^2.$$

   Or, la question précédente garantit que $\mathrm{A}^2 = -\,\mathrm{d\acute{e}t}(\mathrm{A})\,\mathrm{I}_2 + \mathrm{tr}(\mathrm{A})\,\mathrm{A}$*, si bien que* $\mathrm{A}^2 \in \mathscr{V}(\mathrm{A})$.

   On a donc bien $\mathrm{MN} \in \mathscr{V}(\mathrm{A})$.

   (c) Le sous-espace vectoriel $\mathscr{C}(\mathrm{A})$ est-il stable par produit ?

   Oui. (On l'a montré en cours.)

3. On suppose A inversible. Montrer que A^{-1} appartient à la fois à $\mathscr{C}(\mathrm{A})$ et $\mathscr{V}(\mathrm{A})$.

Comme $\mathscr{C}(\mathrm{A})$ contient $\mathscr{V}(\mathrm{A})$, il suffit de montrer que A^{-1} appartient à ce dernier sous-espace vectoriel. On reprend la relation de la question 2a : $\mathrm{A}^2 - \mathrm{tr}(\mathrm{A})\,\mathrm{A} + \mathrm{dét}(\mathrm{A})\,\mathrm{I}_2 = 0_{\mathrm{M}_2(\mathrm{K})}$. Comme A est inversible, son déterminant est non nul et on peut la réécrire $\mathrm{A}\left(\dfrac{1}{\mathrm{dét}(\mathrm{A})}\big(\mathrm{tr}(\mathrm{A})\,\mathrm{I}_2 - \mathrm{A}\big)\right) = \mathrm{I}_2$, ce qui montre que

$$\mathrm{A}^{-1} = \frac{1}{\mathrm{dét}(\mathrm{A})}\big(\mathrm{tr}(\mathrm{A})\,\mathrm{I}_2 - \mathrm{A}\big) \in \mathscr{V}(\mathrm{A}).$$

Notons que ceci n'est qu'une reformulation (parlante) de la formule $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \dfrac{1}{\mathrm{dét}(\mathrm{A})}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.

Partie II. Détermination du commutant.

4. Soit $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_2(\mathrm{K})$. Montrer que $\mathscr{C}(\mathrm{A}) = \mathrm{M}_2(\mathrm{K})$ si et seulement si A est une matrice scalaire.

   - *Clairement, si A est une matrice scalaire, $\mathscr{C}(\mathrm{A}) = \mathrm{M}_2(\mathrm{K})$.*
   - *Réciproquement, supposons que $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ commute avec toute matrice de $\mathrm{M}_2(\mathrm{K})$.*
     - *La commutation avec $\mathrm{E}_{1,1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ montre $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix}$, c'est-à-dire $b = c = 0$: la matrice A est diagonale.*
     - *La commutation avec $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ donne alors $\begin{pmatrix} 0 & d \\ a & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & a \\ d & 0 \end{pmatrix}$, ce qui donne $a = d$.*

     La matrice A est donc bien scalaire.

   Remarque. *On a fait en TD le même exercice, dans $\mathrm{M}_n(\mathrm{K})$, pour ainsi dire pas plus difficile.*

5. **Un lemme sur la condition $\mathrm{AB} = \mathrm{BA} = 0$.** Le but de cette question est de montrer le résultat suivant.

   > **Lemme.** Soit $\mathrm{A} \in \mathrm{M}_2(\mathrm{K})$, non nulle et non inversible. Alors toute matrice $\mathrm{B} \in \mathrm{M}_2(\mathrm{K})$ telle que $\mathrm{AB} = \mathrm{BA} = 0_{\mathrm{M}_2(\mathrm{K})}$ appartient à $\mathscr{V}(\mathrm{A})$.

   On fixe donc dans toute la question une matrice $\mathrm{A} \in \mathrm{M}_2(\mathrm{K})$ non nulle et non inversible.

   (a) Montrer que $\dim\big(\ker \mathrm{A}\big) = 1$ et $\dim\big(\mathrm{im}\, \mathrm{A}\big) = 1$.

   Le noyau de A et son image sont des sous-espaces vectoriels de K^2. Il n'y a donc pas grand chose à faire pour déterminer leurs dimensions.

   - *Le noyau de A n'est pas réduit à $\{0\}$ (car A serait alors inversible, d'après le critère nucléaire) et n'est pas K^2 (car on aurait alors $\mathrm{C}_1(\mathrm{A}) = \mathrm{A}e_1 = 0_{\mathrm{K}^2}$ et* idem *pour la deuxième colonne, donc $\mathrm{A} = 0_{\mathrm{M}_2(\mathrm{K})}$). Il est donc nécessairement de dimension 1.*
   - *De même l'image de A n'est pas à $\{0_{\mathrm{K}^2}\}$ (ce qui entraînerait $\mathrm{A} = 0_{\mathrm{M}_2(\mathrm{K})}$) et n'est pas K^2. En effet, dans ce dernier cas, l'application linéaire canoniquement associée $\varphi_\mathrm{A} : \mathrm{K}^2 \to \mathrm{K}^2$ serait surjective, et A serait inversible.*

   Le noyau et l'image de A sont donc bien des droites.

   En utilisant le théorème de la base incomplète, on en déduit l'existence de bases $\mathscr{X} = (x_0, x_1)$ et $\mathscr{Y} = (y_0, y_1)$ de K^2 telles que $\mathrm{A}x_0 = 0_{\mathrm{K}^2}$ et $\mathrm{A}x_1 = y_1$. (On ne demande pas de le justifier.)

(b) Montrer $\ker(A) = \mathrm{Vect}(x_0)$ et $\mathrm{im}(A) = \mathrm{Vect}(y_1)$.

- *On a* $x_0 \in \ker(A)$ *donc* $\mathrm{Vect}(x_0) \subseteq \ker(A)$. *Comme* $x_0 \neq 0_{K^2}$ *(car il figure dans une base),* $\dim \mathrm{Vect}(x_0) = 1$ *et on en déduit* $\ker(A) = \mathrm{Vect}(x_0)$ *par inclusion et égalité des dimensions.*
- *On a* $y_1 = Ax_1 \in \mathrm{im}(A)$ *donc* $\mathrm{Vect}(y_1) \subseteq \mathrm{im}(A)$. *Ainsi,* $y_1 \neq 0_{K^2}$*, donc* $\dim \mathrm{Vect}(y_1) = 1$ *et* $\mathrm{im}(A) = \mathrm{Vect}(y_1)$ *par inclusion et égalité des dimensions.*

(c) Montrer qu'une matrice $B \in M_2(K)$ vérifie $AB = BA = 0_{M_2(K)}$ si et seulement s'il existe un scalaire $\mu \in K$ tel que $By_0 = \mu x_0$ et $By_1 = 0_{K^2}$.

- *Supposons* $AB = BA = 0_{M_2(K)}$.
  - *Comme* $AB = 0_{M_2(K)}$*, on a* $ABy_0 = 0_{K^2}$ *donc* $By_0 \in \ker(A)$. *D'après la question précédente, on peut trouver* $\mu \in K$ *tel que* $By_0 = \mu x_0$.
  - *On a* $By_1 = BAx_1 = 0_{K^2}$ *car* $BA = 0_{M_2(K)}$.
- *Supposons pouvoir trouver* $\mu \in K$ *tel que* $By_0 = \mu x_0$ *et* $By_1 = 0_{K^2}$.
  - *Soit* $v \in K^2$. *D'après la question précédente, on peut trouver* $\lambda \in K$ *tel que* $Av = \lambda y_1$. *On en déduit* $BAv = \lambda By_1 = 0_{K^2}$.

    Cela étant vrai pour tout $v \in K^2$*, on a montré que l'application linéaire canoniquement associée à* BA *était nulle, ce qui montre* $BA = 0_{M_2(K)}$.
  - *De même,* $ABy_0 = \mu Ax_0 = 0_{K^2}$ *et* $ABy_1 = A0_{K^2} = 0_{K^2}$*, donc l'application linéaire canoniquement associée à* AB *est nulle sur chacun des deux vecteurs de la base* $\mathscr{Y}$.

    Par prolongement des identités, on en déduit que l'application linéaire canoniquement associée à AB *est nulle, si bien que* $AB = 0_{M_2(K)}$.

(d) Montrer qu'il existe une matrice non nulle $H \in \mathscr{V}(A)$ telle que $AH = 0_{M_2(K)}$.

Comme $\mathrm{dét}(A) = 0$*, on a* $A^2 - \mathrm{tr}(A)\,A = 0_{M_2(K)}$*, si bien que la matrice* $H = A - \mathrm{tr}(A)\,I_2 \in \mathscr{V}(A)$ *vérifie* $AH = 0_{M_2(K)}$.

La matrice H *ne peut pas être nulle : si c'était le cas,* A *serait scalaire, et donc nulle ou inversible, ce qui est exclu.*

(e) Conclure la démonstration du lemme.

Considérons une matrice H *comme dans la question précédente. Comme* $H \in \mathscr{V}(A)$*, elle commute à* A *si bien* $AH = HA = 0_{M_2(K)}$.

Soit $B \in \mathscr{C}(A)$ *telle que* $AB = BA = 0_{M_2(K)}$.

D'après ce qui la précéde, on peut trouver $\lambda \in K$ *tel que* $Hy_0 = \lambda x_0$ *et* $Hy_1 = 0_{K^2}$ *et* $\mu \in K$ *satisfaisant aux même relations, vis-à-vis de la matrice* B.

Notons que $\lambda \neq 0$. *En effet, si* λ *était nul, on aurait* $Hy_0 = Hy_1 = 0_{K^2}$*, si bien que l'application linéaire canoniquement associée à* H *serait nulle, et* H *aussi, d'après un raisonnement déjà employé.*

La matrice $B' = B - \frac{\mu}{\lambda}H$ *est alors encore élément du sous-espace vectoriel* $\mathscr{C}(A)$*, mais elle vérifie maintenant* $B'y_0 = \left(\mu - \frac{\mu}{\lambda}\lambda\right) x_0 = 0_{K^2}$ *et* $B'y_1 = 0_{K^2}$*, si bien que* $B' = 0_{M_2(K)}$.

On en déduit que $B = \frac{\mu}{\lambda}H \in \mathscr{V}(A)$*, ce qui conclut.*

6. Soit $A \in M_2(K)$ et $B \in \mathscr{C}(A)$. On suppose la famille (I_2, A, B) libre et $AB \in \mathrm{Vect}(I_2, A, B)$.
   (a) Montrer qu'il existe $\lambda, \mu \in K$ tels que $(A - \lambda I_2)(B - \mu I_2) \in \mathrm{Vect}(I_2)$.

   Comme $AB \in \mathrm{Vect}(I_2, A, B)$*, on peut trouver* $\tau, \alpha, \beta \in K$ *tels que* $AB = \tau I_2 + \alpha A + \beta B$.

   On en déduit

   $$(A - \beta I_2)(B - \alpha I_2) = AB - \alpha A - \beta B + \alpha\beta I_2 = (\tau + \alpha\beta) I_2 \in \mathrm{Vect}(I_2).$$

   (b) En déduire que $B \in \mathscr{V}(A)$, et aboutir à une contradiction.

   D'après la question précédente, on peut trouver $\lambda, \mu, \theta \in K$ *tel que* $(A - \lambda I_2)(B - \mu I_2) = \theta I_2$*. On distingue alors deux cas.*

   - *Si* $\theta \neq 0$*, on a* $A - \lambda I_2 \in GL_2(K)$ *et* $B - \mu I_2 = \theta (A - \lambda I_2)^{-1}$.

     D'après la question 3, on en déduit que $B - \mu I_2 \in \mathrm{Vect}\big(I_2, A - \lambda I_2\big) \subseteq \mathrm{Vect}(I_2, A) = \mathscr{V}(A)$ *puis que* $B \in \mathscr{V}(A)$.
   - *Si* $\theta = 0$*, on cherche à appliquer la question précédente.*
     - *Si* $A - \lambda I_2$ *était nulle, on aurait* $A = \lambda I_2 \in \mathrm{Vect}(I_2)$*, ce qui contredit la liberté de* (I_2, A, B).
     - *Si* $A - \lambda I_2$ *était inversible, on obtiendrait* $B - \mu I_2 = 0_{M_2(K)}$ *en multipliant par l'inverse, donc* $B \in \mathrm{Vect}(I_2)$*, ce qui contredit à nouveau la liberté de* (I_2, A, B).
     - *Ainsi,* $A - \lambda I_2$ *n'est ni nulle, ni inversible, et la question précédente entraîne l'appartenance* $B - \mu I_2 \in \mathrm{Vect}(I_2, A - \lambda I_2)$*, et on conclut* $B \in \mathscr{V}(A)$ *comme dans le cas* $\theta \neq 0$.

   La contradiction est alors immédiate : $B \in \mathrm{Vect}(I_2, A)$*, donc la famille* (I_2, A, B) *ne pouvait pas être libre.*

7. Soit $A \in M_2(K)$ non scalaire. Montrer que $\mathscr{C}(A) = \mathscr{V}(A)$.

   On a déjà montré l'inclusion réciproque, donc on va se concentrer sur l'inclusion directe.

   La famille (I_2) *est libre car* $I_2 \neq 0_{M_2(K)}$*. Comme* A *n'est pas scalaire, on en déduit que* (I_2, A) *est libre par le lemme de précipitation.*

   Supposons par l'absurde que $\mathscr{C}(A) \not\subseteq \mathscr{V}(A)$*. On pourrait donc trouver* $B \in \mathscr{C}(A)$ *tel que* $B \notin \mathrm{Vect}(I_2, A)$*. D'après le lemme de précipitation, la famille* (I_2, A, B) *est alors libre.*

   La question précédente montre que dans ce cas, $AB \notin \mathrm{Vect}(I_2, A, B)$*. D'après le lemme de précipitation, on en déduit que* (I_2, A, B, AB) *est libre.*

   Comme $M_2(K)$ *est de dimension 4, cette famille est nécessairement une base de* $M_2(K)$*, si bien que* $M_2(K) = \mathrm{Vect}(I_2, A, B, AB)$.

   Mais par ailleurs, $\mathscr{C}(A)$ *étant stable par produit, toutes les matrices figurant dans cette famille sont éléments* $\mathscr{C}(A)$*, donc on a* $M_2(K) \subseteq \mathscr{C}(A)$*, c'est-à-dire* $\mathscr{C}(A) = M_2(K)$.

   Cela contredit la question 4, et conclut la démonstration.

Partie III. Sections linéaires de $\mathscr{C}(\cdot)$.

Dans cette partie, on veut déterminer les endomorphismes $f \in \mathscr{L}\big(M_2(K)\big)$ vérifiant la condition

$$\forall A \in M_2(K), f(A)\,A = A\,f(A), \tag{S}$$

c'est-à-dire tels que, pour tout $A \in M_2(K)$, $f(A) \in \mathscr{C}(A)$.

8. Soit $\varphi : M_2(K) \to K$ une application linéaire et $\lambda \in K$. Montrer que $\begin{cases} M_2(K) \to & M_2(K) \\ A & \mapsto \varphi(A)\,I_2 + \lambda A \end{cases}$ est un endomorphisme vérifiant la condition (S).

   La linéarité de $A \mapsto \varphi(A)\,I_2$ est une conséquence directe ‡ de celle de φ.

   En ajoutant l'homothétie $\lambda\,\mathrm{id}_{M_2(K)}$ on obtient donc bien un endomorphisme de E, que l'on va noter f.

   Par ailleurs, pour tout $A \in M_2(K)$, on a $f(A) = \varphi(A)\,I_2 + \lambda A \in \mathscr{V}(A) \subseteq \mathscr{C}(A)$, donc on a bien la relation $f(A)\,A = A\,f(A)$.

9. On note $\mathscr{B}_c = (E_{1,1}, E_{1,2}, E_{2,1}, E_{2,2})$ la base canonique de $M_2(K)$.

   Étant donné quatre indices $i, j, k, \ell \in [\![1, 2]\!]$, déterminer à quelle condition la famille de trois matrices $(I_2, E_{i,j}, E_{k,\ell})$ est libre.

   - *Évidemment, si $(i, j) = (k, \ell)$, la famille ne peut pas être libre.*
   - *Dans le cas contraire, $(E_{i,j}, E_{k,\ell})$ est (quitte à échanger les deux vecteurs) une sous-famille de la base canonique, et est donc libre.*

     D'après le lemme de précipitation, la famille $(I_2, E_{i,j}, E_{k,\ell})$ est libre si et seulement si $I_2 \notin \mathrm{Vect}(E_{i,j}, E_{k,\ell})$. La décomposition dans la base canonique de I_2 étant évidemment $I_2 = 1\,E_{1,1} + 0\,E_{1,2} + 0\,E_{2,1} + 1\,E_{2,2}$, l'appartenance $I_2 \in \mathrm{Vect}(E_{i,j}, E_{k,\ell})$ ne peut se produire que si $(i, j) = (1, 1)$ et $(k, \ell) = (2, 2)$, ou l'inverse.

   In fine, *la famille de l'énoncé est libre sauf dans les cas $(i, j) = (k, \ell)$ ou $\{(i, j), (k, \ell)\} = \{(1, 1), (2, 2)\}$.*

10. Montrer que tous les endomorphismes de $M_2(K)$ vérifiant la condition (S) sont de la forme donnée à la question 8.

    Soit $f \in \mathscr{L}\big(M_2(K)\big)$ vérifiant la condition (S).

    Pour tout $(i, j) \in \{1, 2\}^2$, la matrice $E_{i,j}$ n'est pas scalaire donc la partie précédente montre l'égalitéx $\mathscr{C}(E_{i,j}) = \mathrm{Vect}(I_2, E_{i,j})$. En particulier, on peut trouver $\alpha_{i,j}, \lambda_{i,j} \in K$ tels que $f(E_{i,j}) = \alpha_{i,j} I_2 + \lambda_{i,j} E_{i,j}$.

    Étant donné deux couples $(i, j), (k, \ell)$ tels que $\mathscr{F} = (I_2, E_{i,j}, E_{k,\ell})$ soit libre, on obtient ainsi quatre scalaires et l'on a

    $$\begin{aligned} f(E_{i,j}) &= \alpha_{i,j} I_2 + \lambda_{i,j} E_{i,j} + 0 E_{k,\ell} \\ f(E_{k,\ell}) &= \alpha_{k,\ell} I_2 + 0 E_{i,j} + \lambda_{k,\ell} E_{k,\ell} \\ \textit{donc} \qquad f\big(E_{i,j} + E_{k,\ell}\big) &= (\alpha_{i,j} + \alpha_{k,\ell}) I_2 + \lambda_{i,j} E_{i,j} + \lambda_{k,\ell} E_{k,\ell}. \end{aligned}$$

    Or, la matrice $E_{i,j} + E_{k,\ell}$ n'est pas non plus scalaire (sinon, $\mathscr{F}$ serait liée) donc cette dernière somme doit appartenir à $\mathrm{Vect}(I_2, E_{i,j} + E_{k,\ell})$, ce qui force $\lambda_{k,\ell} = \lambda_{i,j}$.

    Autrement dit, on a montré $\lambda_{k,\ell} = \lambda_{i,j}$ dès que les couples (i, j) et (k, ℓ) respectent les conditions de la question prédente. On en déduit successivement $\lambda_{1,1} = \lambda_{1,2} = \lambda_{2,2} = \lambda_{2,1}$ et on note ce scalaire λ.

‡. De manière générale, étant donné une forme linéaire $\varphi : E \to K$ et un vecteur $v \in E$, on obtient un endomorphisme $x \mapsto \varphi(x)\,v$ de E, parfois noté $v \otimes \varphi$.

On a donc montré l'existence de scalaires $\alpha_{i,j}$ *et* $\lambda \in K$ *tels que* $\forall i, j \in \{1,2\}, f(E_{i,j}) = \alpha_{i,j} I_2 + \lambda E_{i,j}$.

Par propriété universelle des bases, on peut trouver une forme linéaire $\varphi : M_2(K) \to K$ *telle que l'on ait* $\forall i, j \in \{1,2\}, \varphi(E_{i,j}) = \alpha_{i,j}$.

Les endomorphismes f *et* $A \mapsto \varphi(A)\, I_2 + \lambda A$ *coïncident sur les vecteurs de la base canonique donc ils sont égaux par prolongement des identités.*

Partie IV. Théorème de Posner.

Une *dérivation* de $M_2(K)$ est un endomorphisme $d \in \mathscr{L}\big(M_2(K)\big)$ tel que

$$\forall A, B \in M_2(K), d(AB) = A\, d(B) + d(A)\, B.$$

11. Montrer que l'endomorphisme nul est l'unique dérivation de $M_2(K)$ vérifiant la condition de commutation $\forall A \in M_2(K), d(A)A = Ad(A)$.

Il est clair que l'endomorphisme nul convient, si bien que l'on se concentre sur l'implication non triviale. Soit d *une dérivation vérifiant* $\forall A \in M_2(K), d(A)A = Ad(A)$.

D'après le résultat de la partie précédente, on peut trouver une forme linéaire φ *sur* $M_2(K)$ *et un scalaire* $\lambda \in K$ *tels que*

$$\forall A \in M_2(K), d(A) = \varphi(A)\, I_2 + \lambda\, A.$$

Le fait que d *soit une dérivation se traduit alors, après calcul, par le fait que*

$$\forall A, B \in M_2(K), \varphi(AB) I_2 = \varphi(B) A + \varphi(A) B + \lambda AB.$$

En appliquant par exemple cette condition à $A = E_{1,2}$ *et* $B = E_{2,1}$, *on obtient*

$$\varphi(E_{1,1}) I_2 = \varphi(E_{2,1}) E_{1,2} + \varphi(E_{1,2}) E_{2,1} + \lambda E_{1,1},$$

c'est-à-dire, en faisant passer toutes les matrices du même côté, $\begin{pmatrix} \lambda - \varphi(E_{1,1}) & \varphi(E_{2,1}) \\ \varphi(E_{1,2}) & -\varphi(E_{1,1}) \end{pmatrix} = 0_{M_2(K)}$, *d'où l'on tire* $\varphi(E_{1,1}) = \varphi(E_{2,1}) = \varphi(E_{1,2}) = \lambda = 0$.

En particulier, $d(E_{1,1}) = d(E_{2,1}) = d(E_{1,2}) = 0_{M_2(K)}$.

On en déduit

$$d(E_{2,2}) = d(E_{2,1} E_{1,2}) = E_{2,1}\, d(E_{1,2}) + d(E_{2,1}) E_{1,2} = 0_{M_2(K)}.$$

L'application linéaire d *est donc nulle sur chaque vecteur de la base canonique, ce qui entraîne par prolongement des identités que* d *est l'endomorphisme nul.*

Problème B. Inégalités de Landau-Kolmogorov.

Dans tout le problème sauf la dernière question, $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ est une fonction de classe C^2.

On rappelle que si $g : I \to \mathbb{R}$ est une fonction bornée définie sur un intervalle I, sa *norme uniforme* est

$$\|g\|_\infty = \sup\left\{|g(t)| \,\middle|\, t \in I\right\}.$$

1. **(In)égalité de Taylor-Lagrange.** Soit $a, b \in \mathbb{R}_+$ deux points différents.

   (a) Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on considère la fonction $g_\lambda : \begin{cases} \mathbb{R}_+ \to & \mathbb{R} \\ x \mapsto f(x) - \big(f(a) + f'(a)\,(x-a)\big) - \lambda\dfrac{(x-a)^2}{2} \end{cases}$.

   Montrer qu'il existe un unique $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $g_\lambda(a) = g'_\lambda(a) = g_\lambda(b) = 0$.

   - *On obtient directement que, quel que soit $\lambda \in \mathbb{R}$, $g_\lambda(a) = g'_\lambda(a) = 0$.*
   - *Comme $b \neq a$, $g_\lambda(b)$ est un polynôme en λ de degré exactement 1 (et de coefficient dominant $\dfrac{(b-a)^2}{2}$) donc il possède une unique racine.*

     Autrement dit, il existe un unique $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $g_\lambda(b) = 0$.

   Dans la suite de la question, on choisit cette valeur de λ.

   (b) Montrer qu'il existe $c \in \mathbb{R}_+$ tel que $g''_\lambda(c) = 0$.

   - *On applique une première fois le théorème de Rolle à la fonction g_λ (continue sur $[\overleftrightarrow{a,b}]$, dérivable sur $]\overleftrightarrow{a,b}[$, $g_\lambda(a) = g_\lambda(b) = 0$) et l'on obtient $d \in]\overleftrightarrow{a,b}[$ tel que $g'_\lambda(d) = 0$.*
   - *On applique à nouveau le théorème de Rolle à g'_λ (continue sur $[\overleftrightarrow{a,d}]$, dérivable sur $]\overleftrightarrow{a,d}[$, $g'_\lambda(a) = g'_\lambda(d) = 0$) et l'on obtient $c \in]\overleftrightarrow{a,d}[$ tel que $g''_\lambda(c) = 0$.* A fortiori, *on a $c \in \mathbb{R}_+$.*

   (c) En déduire une expression de $f(b)$, en fonction de $f(a)$, $f'(a)$ et $f''(c)$.

   On a $g''_\lambda : x \mapsto f''(x) - \lambda$, donc la condition $g''_\lambda(c) = 0$ donne $\lambda = f''(c)$.

   La condition $g_\lambda(b) = 0$ se réécrit donc

$$f(b) = f(a) + f'(a)(b-a) + f''(c)\frac{(x-c)^2}{2}.$$

   (d) On suppose f'' bornée. Déduire de la formule précédente l'inégalité

$$\left|f(b) - \big(f(a) + f'(a)\,(b-a)\big)\right| \leqslant \frac{(b-a)^2}{2}\|f''\|_\infty.$$

   C'est vraiment une conséquence directe de la formule précédente :

$$\left|f(b) - \big(f(a) + f'(a)\,(b-a)\big)\right| = \left|\frac{(b-a)^2}{2}f''(c)\right| = \frac{(b-a)^2}{2}\,|f''(c)| \leqslant \frac{(b-a)^2}{2}\,\|f''\|_\infty$$

   en majorant grossièrement : $|f''(c)| \leqslant \|f''\|_\infty$.

   (La question est surtout là pour vous aider à détecter une éventuelle erreur à la question précédente...)

2. **Inégalité de Landau (1914).** On suppose les fonctions f et f'' bornées sur $\mathbb{R}_+$.
   (a) Montrer que f' est bornée et que

$$\forall a \in \mathbb{R}_+, \forall \theta > 0, |f'(a)| \leqslant \frac{2}{\theta}\|f\|_\infty + \frac{\theta}{2}\|f''\|_\infty.$$

Soit $a \in \mathbb{R}_+$ *et* $\theta > 0$. *On applique la formule de la question 1c à* a *et* $b = a + \theta$ *: il existe* $c \in \mathbb{R}_+$ *tel que*

$$f(a+\theta) = f(a) + f'(a)\,\theta + f''(c)\frac{\theta^2}{2}.$$

En isolant le terme en $f'(a)$ *(ce qui est facilité par le fait qu'on peut diviser par* $\theta > 0$*), on en déduit*

$$f'(a) = \frac{f(a+\theta) - f(a)}{\theta} + f''(c)\frac{\theta}{2} \qquad \textit{donc} \qquad \begin{aligned} |f'(a)| &\leqslant \frac{1}{\theta}\big|f(a+\theta) - f(a)\big| + \frac{\theta}{2}|f''(c)| \\ &\leqslant \frac{2\,\|f\|_\infty}{\theta} + \frac{\theta\,\|f''\|_\infty}{2} \end{aligned}$$

car $\big|f(a+\theta) - f(a)\big| \leqslant |f(a+\theta)| + |f(a)| \leqslant 2\|f\|_\infty$.

   (b) En déduire l'inégalité $\|f'\|_\infty \leqslant K\sqrt{\|f\|_\infty\,\|f''\|_\infty}$, pour une certaine constante K.

Soit $a \in \mathbb{R}_+$.

- *Supposons* $\|f''\|_\infty > 0$.

  Après un petit calcul de dérivée au brouillon, on décide d'appliquer l'inégalité précédente à $\theta = 2\left(\dfrac{\|f\|_\infty}{\|f''\|_\infty}\right)^{1/2}$, *ce qui donne* $|f(a)| \leqslant 2\,\|f\|_\infty^{1/2}\,\|f''\|_\infty^{1/2}$.

  Cette inégalité étant valable pour tout a, *la fonction* f' *est bornée, et on obtient*

$$\|f'\|_\infty \leqslant 2\,\|f\|_\infty^{1/2}\,\|f''\|_\infty^{1/2}$$

  par passage à la borne supérieure.
- *Supposons* $\|f''\|_\infty = 0$. *On en déduit* $\forall x \in \mathbb{R}_+, f''(x) = 0$, *c'est-à-dire que la fonction* f *est affine.*

  Comme f *est également supposée bornée, cela entraîne qu'elle est en fait constante.*

  Ainsi, $f' = 0$, *et l'inégalité obtenue ci-dessus dans le cas « générique » s'applique encore, même si c'est un peu trivialement.*

3. **Un peu d'analyse dimensionnelle.** Soit $n \geqslant 2$. En 1938, Kolmogorov a considérablement généralisé l'inégalité de Landau en montrant que si $f \in C^n(\mathbb{R}_+)$ est telle que f et $f^{(n)}$ sont bornées, alors il en va de même de toutes les dérivées intermédiaires et l'on a les inégalités

$$\forall k \in [\![1, n-1]\!], \|f^{(k)}\|_\infty \leqslant K_{n,k}\,\|f\|_\infty^{\alpha_{n,k}}\,\|f^{(n)}\|_\infty^{\beta_{n,k}},$$

pour un certain choix de constantes $K_{n,k}$ et d'exposants $\alpha_{n,k}, \beta_{n,k} \geqslant 0$.

En admettant ce résultat, déterminer les exposants $\alpha_{n,k}$ et $\beta_{n,k}$.

L'idée est d'appliquer les inégalités en dilatant plus ou moins les deux dimensions à notre portée : les abscisses et les ordonnées.

Partons d'une fonction dont toutes les dérivées sont bornées sans qu'aucune ne soit nulle, disons la fonction sinus (mais le choix de cette fonction n'a à vrai dire aucune importance).

Pour tous $\lambda, \mu > 0$, on peut considérer la fonction $f_{\lambda,\mu} : x \mapsto \lambda \sin(\mu x)$. Cette fonction est lisse donc de classe C^n et, pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a $f^{(k)} : x \mapsto \lambda \mu^k \operatorname{trig}(\mu x)$, où trig désigne $\pm \cos$ ou $\pm \sin$, suivant la valeur de k.

En particulier, $\|f^{(k)}\|_\infty = \lambda \mu^k$.

L'inégalité de Kolmogorov nous garantit donc que

$$\forall \lambda, \mu > 0, \lambda \mu^k \leqslant K_{n,k} \lambda^{\alpha_{n,k}} \left(\lambda \mu^n\right)^{\beta_{n,k}} = K_{n,k} \lambda^{\alpha_{n,k}+\beta_{n,k}} \mu^{n \beta_{n,k}}.$$

La fonction $\begin{cases} \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* \to & \mathbb{R} \\ (\lambda, \mu) \mapsto & \dfrac{\lambda \mu^k}{\lambda^{\alpha_{n,k}+\beta_{n,k}} \mu^{n \beta_{n,k}}} = \lambda^{1-\alpha_{n,k}-\beta_{n,k}} \mu^{k-n \beta_{n,k}} \end{cases}$ *est donc bornée (par $K_{n,k}$).*

- *En fixant $\mu = 1$ et en faisant tendre λ vers 0, on obtient que $1 - \alpha_{n,k} - \beta_{n,k} \geqslant 0$. De même, en faisant tendre λ vers $+\infty$, on a $1 - \alpha_{n,k} - \beta_{n,k} \leqslant 0$. Ainsi, $\alpha_{n,k} + \beta_{n,k} = 1$.*
- *De même, en fixant $\lambda = 1$ et en faisant tendre μ vers 0 et vers $+\infty$, on obtient $n\beta_{n,k} = k$, c'est-à-dire $\beta_{n,k} = k/n$.*

On en déduit $\alpha_{n,k} = 1 - \dfrac{k}{n} = \dfrac{n-k}{n}$ et $\beta_{n,k} = \dfrac{k}{n}$.

4. **Un corollaire qualitatif.** Soit $f \in C^2(\mathbb{R}_+)$, telle que f'' soit bornée. On suppose que la fonction f converge au voisinage de $+\infty$.

   Montrer que $f'(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$ en utilisant l'inégalité de Landau.

   Notons $M = \|f''\|_\infty$.

   D'abord, il est clair (en l'appliquant à $x \mapsto f(H + x)$ ou en parcourant la démonstration) que l'inégalité de Landau s'applique telle quelle à des fonctions C^2 définies sur des demi-droites $[H, +\infty[$.

   Ensuite, quitte à retrancher une constante à f – ce qui ne change ni f' ni f'' – on peut supposer que $f(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$, ce que l'on fera dans la suite.

   Soit $\varepsilon > 0$.

   On peut trouver $H \in \mathbb{R}_+$ tel que $\forall x \in [H, +\infty[, |f(x)| \leqslant \varepsilon^2$. En notant $\|\cdot\|_\infty^{[H,+\infty[}$ la norme uniforme sur la demi-droite $[H, +\infty[$, l'inégalité de Landau sur la demi-droite $[H, +\infty[$ montre que la dérivée f' y est bornée et que

$$\|f'\|_\infty^{[H,+\infty[} \leqslant 2\sqrt{\|f\|_\infty^{[H,+\infty[} \|f''\|_\infty^{[H,+\infty[}} \leqslant 2\sqrt{M}\, \varepsilon.$$

   Cela montre $f'(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$.

5.⁺ **Une variante sur $\mathbb{R}$ avec une meilleure constante : inégalité de Hadamard (1914).** On considère une fonction $f \in C^2(\mathbb{R})$ bornée, et telle que f'' soit bornée.

   Montrer que f' est bornée et que $\|f'\|_\infty \leqslant \sqrt{2\|f\|_\infty \|f''\|_\infty}$.

   On reprend grosso modo *le même raisonnement que pour l'inégalité de Landau, avec une petite amélioration technique astucieuse.*

   Fixons $a \in \mathbb{R}$. Pour tout $\theta > 0$, on peut appliquer la question 1c (dans laquelle l'intervalle $\mathbb{R}_+$ ne jouait aucun rôle : elle reste parfaitement valable sur n'importe quel autre intervalle) ***simultanément*** *à a et $a + \theta$ d'une part, et à a et $a - \theta$ de l'autre. On obtient ainsi deux réels $c_\pm \in \mathbb{R}$ tels que*

$$f(a + \theta) = f(a) + f'(a)\theta + \frac{\theta^2}{2} f''(c_+)$$

$$\text{et} \qquad f(a-\theta) = f(a) - f'(a)\theta + \frac{\theta^2}{2} f''(c_-).$$

$$\textit{Ainsi,} \qquad f(a+\theta) - f(a-\theta) = 2f'(a)\theta + \frac{\theta^2}{2}\big(f''(c_+) - f''(c_-)\big)$$

$$\textit{donc} \qquad f'(a) = \frac{f(a+\theta) - f(a-\theta)}{2\theta} - \frac{\theta}{4}\big(f''(c_+) - f''(c_-)\big)$$

$$\textit{donc} \qquad |f'(a)| \leqslant \frac{\|f\|_\infty}{\theta} + \frac{\theta}{2}\|f''\|_\infty.$$

En répétant les dernières étapes de la démonstration de l'inégalité de Landau (c'est-à-dire en choisissant le θ *optimal* [§]*), on arrive à l'inégalité de Hadamard.*

§. Si on cherche à retenir ce calcul général – que l'on a déjà croisé dans l'une des démonstrations du théorème de Cauchy-Schwarz – étant donné u et $v \geqslant 0$, la plus petite valeur de la moyenne arithmétique $\frac{\lambda u + \lambda^{-1} v}{2}$ de λu et $\lambda^{-1} v$ est toujours leur moyenne géométrique $\sqrt{(\lambda u)(\lambda^{-1} v)} = \sqrt{uv}$, qui a effectivement le bon goût de ne pas dépendre de λ.