Huitième composition de mathématiques [corrigé]

Exercice 1. Interro de calcul du ~~vendredi~~ samedi.

1. Calculer $\displaystyle\int_0^1 x^3\ \exp(x^2)\,dx$.

   On écrit $x^3\ \exp(x^2) = x^2\left(x\ \exp(x^2)\right)$, *ce qui fait apparaître la dérivée de* $x \mapsto \dfrac{1}{2}\exp(x^2)$.

   Plus précisément,

$$\begin{aligned}\int_0^1 x^3\ \exp(x^2)\,dx &= \int_0^1 \underbrace{x^2}_{\downarrow}\ \underbrace{x\ \exp(x^2)}_{\uparrow}\,dx \\ &\overset{IPP}{=} \left[x^2\,\frac{\exp(x^2)}{2}\right]_{x=0}^1 - \int_0^1 2x\,\frac{\exp(x^2)}{2}\,dx \qquad (x\mapsto x^2 \text{ et } x\mapsto e^{x^2} \text{ sont } C^1) \\ &= \frac{e}{2} - \underbrace{\left[\frac{1}{2}\exp(x^2)\right]_{x=0}^1}_{=\frac{e}{2}-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

2. Calculer $\displaystyle\int_0^{\ln(2+\sqrt{3})} \frac{\mathrm{sh}(x)}{\mathrm{ch}(x)^2+\mathrm{ch}(x)}\,dx$.

   Le changement de variables $u = \mathrm{ch}(x)$ *est très tentant, surtout que l'on reconnaît l'élément infinitésimal* $du = \mathrm{sh}(x)\,dx$. *On a* $\mathrm{ch}\,0 = 1$ *et* $\mathrm{ch}\big(\ln(2+\sqrt{3})\big) = \dfrac{1}{2}\big((2+\sqrt{3})+(2+\sqrt{3})^{-1}\big) = \cdots = 2$. *Ainsi,*

$$\begin{aligned}\int_0^{\ln(2+\sqrt{3})} \frac{\mathrm{sh}(x)}{\mathrm{ch}(x)^2+\mathrm{ch}(x)}\,dx &= \int_1^2 \frac{du}{u^2+u} \qquad \begin{bmatrix} u=\mathrm{ch}(x) \\ du = \mathrm{sh}(x)\,dx \\ \mathrm{sh}\ \text{est}\ C^1\end{bmatrix} \\ &\overset{DÉS}{=} \int_1^2 \left(\frac{1}{u}-\frac{1}{1+u}\right)du = \cdots = 2\,\ln(2)-\ln(3).\end{aligned}$$

3. On pose $\mathrm{I} = \displaystyle\int_{-1}^1 \frac{dx}{(1+e^x)(1+x^2)}$.

   (a) À l'aide du changement de variables $y = -x$, obtenir une autre expression pour I.

   On a $\mathrm{I} = \displaystyle\int_1^{-1} \frac{-dy}{(1+e^{-y})(1+y^2)} = \int_{-1}^1 \frac{dy}{(1+e^{-y})(1+y^2)} = \int_{-1}^1 \frac{e^y\,dy}{(e^y+1)(1+y^2)}$.

   (b) Simplifier $\mathrm{I}+\mathrm{I}$, et en déduire la valeur de I.

   En sommant les deux expressions de I, *on a* $\mathrm{I}+\mathrm{I} = \displaystyle\int_{-1}^1 \frac{(1+e^x)dx}{(e^x+1)(1+x^2)} = \int_{-1}^1 \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2}$, *si bien que* $\mathrm{I} = \dfrac{\pi}{4}$.

Exercice 2. Algèbre linéaire.

1. Soit E un espace vectoriel de dimension n et I, K deux sous-espaces vectoriels de E.

   Montrer l'équivalence

$$\big(\exists u \in \mathscr{L}(E) : \operatorname{im} u = I \text{ et } \ker u = K\big) \Leftrightarrow \dim I + \dim K = n.$$

- *Supposons pouvoir trouver* $u \in \mathscr{L}(E)$ *d'image* I *et de noyau* K. *La formule du rang appliquée à* u *donne alors immédiatement* $\dim I + \dim K = \dim E = n$.
- *Réciproquement, supposons* $\dim I + \dim K = n$, *et notons* $r = \dim I$. *On a donc* $\dim K = n - r$.
  - *On peut fixer une base* $(v_{r+1}, \ldots, v_n)$ *de* K *(après avoir noté qu'elle comportait bien* $n - r$ *vecteurs), et la compléter en une base* $\mathscr{B} = (v_1, \ldots, v_n)$ *de* E.
  - *On peut fixer une base* $(w_1, \ldots, w_r)$ *de* I, *que l'on pourrait compléter en une autre base de* E, *mais ça n'a pas d'importance.*
  - *D'après la propriété universelle des bases, on peut alors trouver un endomorphisme* $u \in \mathscr{L}(E)$ *tel que* $\forall j \in [\![1, r]\!], u(v_j) = w_j$ *et* $\forall j \in [\![r+1, n]\!]$, $u(v_j) = 0_E$.
  - *Reste à montrer* $\operatorname{im} u = I$ *et* $\ker u = K$.
    - ▷ *On a* $\operatorname{im} u = \operatorname{Vect}\big(u(v_1), \ldots, u(v_n)\big) = \operatorname{Vect}\big(w_1, \ldots, w_r, 0_E, \ldots, 0_E\big) = I$.
    - ▷ *On a* $\forall j \in [\![r+1, n]\!], v_j \in \ker u$ *par construction, donc* $K \subseteq \ker u$ *par stabilité par combinaison linéaire.*
    - ▷ *Enfin, on a* $n - r = \dim K$ *et* $\dim \ker u = n - \dim \operatorname{im} u = n - \dim I = n - r$ *d'après la formule du rang, donc on obtient* $K = \ker u$ *par inclusion et égalité des dimensions.*

2. Soit E un espace vectoriel de dimension n et $v_1, \ldots, v_{n+2} \in E$.

   Montrer qu'il existe $\alpha_1, \ldots, \alpha_{n+1}, \alpha_{n+2} \in K$ non tous nuls tels que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n+2} \alpha_k = 0$ et $\displaystyle\sum_{k=1}^{n+2} \alpha_k v_k = 0_E$.

   Proposons deux démonstrations assez différentes.

En augmentant la dimension. *On considère l'espace vectoriel* $\widehat{E} = E \times K$. *Pour tout* $j \in [\![1, n+2]\!]$, *on définit* $\widehat{v}_j = (v_j, 1) \in \widehat{E}$.

Clairement, $\dim \widehat{E} = n + 1 < n + 2$, *donc la famille* $\big(\widehat{v}_1, \ldots, \widehat{v}_{n+2}\big)$ *est toujours liée : on peut donc trouver* $\alpha_1, \ldots, \alpha_{n+2} \in K$ *non tous nuls tels que* $\displaystyle\sum_{k=1}^{n+2} \alpha_k \widehat{v}_k = 0_{\widehat{E}}$.

En passant à la première coordonnée, on a $\displaystyle\sum_{k=1}^{n+2} \alpha_k v_k = 0_E$. *En passant à la seconde,* $\displaystyle\sum_{k=1}^{n+2} \alpha_k = 0$, *ce qui conclut.*

En posant « la bonne » application linéaire. *Considérons « l'hyperplan standard »*

$$H = \left\{ (\alpha_1, \ldots, \alpha_{n+2}) \in K^{n+2} \,\middle|\, \sum_{k=1}^{n+2} \alpha_k = 0 \right\}.$$

En tant que noyau de la forme linéaire non nulle $\left\{ \begin{array}{rcl} K^{n+2} & \to & K \\ (\alpha_1, \ldots, \alpha_{n+2}) & \mapsto & \displaystyle\sum_{k=1}^{n+2} \alpha_k, \end{array} \right.$ *il s'agit d'un hyperplan de* K^{n+2} *et donc d'un espace vectoriel de dimension* $n + 1$.

Puisque $\dim H > \dim E$, *l'application linéaire* $\begin{cases} H & \to & E \\ (\alpha_1, \ldots, \alpha_{n+2}) & \mapsto & \displaystyle\sum_{k=1}^{n+2} \alpha_k v_k \end{cases}$ *ne peut pas être injective. Tout élément non nul de son noyau répond alors à la question.*

3. Soit E un espace vectoriel de dimension finie.

   (a) Soit $f, g \in \mathscr{L}(E)$. Montrer le **lemme de Weyr** : $\dim f\big[\ker(g \circ f)\big] = \operatorname{rg} f - \operatorname{rg}(g \circ f)$.

   On applique la formule du rang à la restriction de f *à* $\ker(g \circ f)$ *(qui est bien un sous-espace vectoriel de* E*, donc la restriction hérite de la linéarité de* f*).*

   Le noyau de cette restriction est $\ker f \cap \ker(g \circ f) = \ker f$.

   L'image de cette restriction est $f\big[\ker(g \circ f)\big]$. *On en déduit*

   $$\begin{aligned} \dim f\big[\ker(g \circ f)\big] = \dim \ker(g \circ f) - \dim \ker f &= \big(\dim E - \operatorname{rg}(g \circ f)\big) - \big(\dim E - \operatorname{rg} f\big) \\ &= \operatorname{rg} f - \operatorname{rg}(g \circ f) \end{aligned}$$

   en appliquant en tout trois fois la formule du rang.

   (b) En déduire l'**inégalité de Frobenius** :

   $$\forall u, v, w \in \mathscr{L}(E), \operatorname{rg}(w \circ v \circ u) \geqslant \operatorname{rg}(w \circ v) + \operatorname{rg}(v \circ u) - \operatorname{rg} v.$$

   Soit $u, v, w \in \mathscr{L}(E)$. *L'inégalité à montrer se réécrit* $\operatorname{rg}(v \circ u) - \operatorname{rg}(w \circ v \circ u) \leqslant \operatorname{rg} v - \operatorname{rg}(w \circ v)$ *donc, en utilisant deux fois le lemme de Weyr,* $\dim(v \circ u)[\ker(w \circ v \circ u)] \leqslant \dim v[\ker(w \circ v)]$.

   Pour montrer cette inégalité de dimensions, on va montrer l'inclusion des sous-espaces vectoriels de E *correspondants.*

   Soit $z \in (v \circ u)[\ker(w \circ v \circ u)]$ *: on peut donc trouver* $x \in \ker(w \circ v \circ u)$ *tel que* $z = (v \circ u)(x)$.

   Notons qu'alors $y = u(x)$ *appartient à* $\ker(w \circ v)$, *car* $(w \circ v)(y) = (w \circ v \circ u)(x) = 0_E$. *On a alors* $z = (v \circ u)(x) = v(y) \in v[\ker(w \circ v)]$, *ce qui conclut cette démonstration.*

   (c) Soit $u \in \mathscr{L}(E)$. Démontrer l'inégalité de convexité des rangs itérés :

   $$\forall n \in \mathbb{N}, \operatorname{rg} u^{n+1} - \operatorname{rg} u^{n+2} \leqslant \operatorname{rg} u^n - \operatorname{rg} u^{n+1}.$$

   Soit $n \in \mathbb{N}$. *L'inégalité de Frobenius appliquée à* u, u^n *et* u *donne* $\operatorname{rg} u^{n+2} \geqslant 2 \operatorname{rg} u^{n+1} - \operatorname{rg} u^n$, *ce qui équivaut à l'inégalité de convexité des rangs itérés.*

Problème. Théorème de Skolem-Noether pour $M_n(K)$.

Le corps des scalaires K sera $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Toutes les notions d'algèbre linéaire ((sous-)espaces vectoriels, applications linéaires, etc.) seront relatives au corps K. On fixe un entier $n \geqslant 2$.

Partie I. Généralités et but du problème.

Définition. Un *morphisme d'algèbres* $M_n(K) \to M_n(K)$ est un endomorphisme φ de $M_n(K)$ vérifiant

(i) $\varphi(I_n) = I_n$;

(ii) $\forall A, B \in M_n(K), \varphi(AB) = \varphi(A)\,\varphi(B)$.

1. Montrer que les applications suivantes ne sont pas des morphismes d'algèbres $M_n(K) \to M_n(K)$.

   (a) $\tau : \begin{cases} M_n(K) \to M_n(K) \\ \quad A \quad \mapsto \quad A^T. \end{cases}$

   Cette application ne vérifie pas la deuxième condition : pour $A = E_{1,1}$ *et* $B = E_{1,2}$, *on a*

   $$\tau(AB) = \tau(E_{1,2}) = E_{2,1} \neq 0_n = E_{1,1}E_{2,1} = \tau(A)\,\tau(B).$$

   (b) $q : \begin{cases} M_n(K) \to M_n(K) \\ \quad A \quad \mapsto \quad A^2. \end{cases}$

   Cette application n'est pas linéaire, et donc pas un endomorphisme : $q(2I_n) = 4I_n \neq 2I_n = 2q(I_n)$.

   (c) $\kappa : \begin{cases} M_n(K) \to M_n(K) \\ \quad A \quad \mapsto (A^{-1})^T. \end{cases}$

   Cette application n'est pas bien définie ! L'expression A^{-1} *n'a pas de sens hors de* $GL_n(K)$.

2. Soit $P \in GL_n(K)$. Montrer que $\mathrm{ad}_P : \begin{cases} M_n(K) \to M_n(K) \\ \quad A \quad \mapsto PAP^{-1} \end{cases}$ est un morphisme d'algèbres.

   On vérifie sans difficulté les axiomes.

   - *La linéarité est essentiellement claire, par bilinéarité du produit matriciel.*
   - *On a* $\mathrm{ad}_P(I_n) = PP^{-1} = I_n$.
   - *Pour tous* $A, B \in M_n(K)$, *on a* $\mathrm{ad}_P(A)\ \mathrm{ad}_P(B) = PAP^{-1}\,PBP^{-1} = PABP^{-1} = \mathrm{ad}_P(AB)$.

3. Construire deux matrices $P, Q \in GL_n(K)$ telles que $\mathrm{ad}_P = \mathrm{ad}_Q$.

   Comme les matrices scalaires commutent avec toutes les autres, on voit immédiatement que, pour tout $\lambda \in K^*$, *on a* $\mathrm{ad}_{\lambda I_n} = \mathrm{id}_{M_n(K)}$. *En particulier,* $\mathrm{ad}_{I_n} = \mathrm{ad}_{2I_n}$.

Le but du problème est de montrer que tous les morphismes d'algèbres $M_n(K) \to M_n(K)$ sont de la forme décrite à la question 2. C'est un cas particulier d'un théorème dû (indépendamment) à Thoralf Skolem et Emmy Noether.

Partie II. Le cas $n = 2$ par les symétries anticommutant.

Pour tout $\lambda \in K$ et tout endomorphisme u d'un espace vectoriel E, on utilisera la notation habituelle pour les espaces propres : $E_\lambda(u) = \ker\big(u - \lambda\ \mathrm{id}_E\big)$.

4. **Théorème de Cayley-Hamilton pour les matrices d'ordre 2.** Soit $A \in M_2(K)$.
   Trouver $\delta \in K$ tel que $A^2 - \mathrm{tr}(A)\, A + \delta\, I_2 = 0_2$.

   On a déjà fait ce calcul important dans un devoir précédent : $\delta = \mathrm{dét}(A)$ *convient.*

5. **Les matrices S et T.** Dans cette partie, on note $S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ et $T = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

   (a) En utilisant la question précédente, montrer que $S^2 = T^2 = I_2$.

   On remarque que les deux matrices S *et* T *ont une trace nulle et un déterminant égal à* -1. *Le théorème de Cayley-Hamilton conclut alors.*

   (b) Calculer le produit ST, le produit TS, et montrer que (I_2, S, T, ST) est une base de $M_2(K)$.

   On obtient $ST = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ *et* $TS = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, *dont on remarque déjà qu'elles sont opposées.*

   - *Les matrices* I_2 *et* S *ne sont clairement pas colinéaires, donc* (I_2, S) *est libre.*
   - *On a* $\mathrm{Vect}(I_2, S) \subseteq D_2(K)$ *par stabilité par combinaison linéaire et* T *n'est pas diagonale, donc* (I_2, S, T) *est libre, d'après le lemme de précipitation.*
   - *Enfin,* $\mathrm{Vect}(I_2, S, T) \subseteq S_2(K)$ *par stabilité par combinaison linéaire et* ST *n'est pas symétrique, donc* (I_2, S, T, ST) *est libre, d'après le lemme de précipitation.*

   Famille libre de $\dim M_2(K) = 4$ *vecteurs,* (I_2, S, T, ST) *est bien une base de* $M_2(K)$.

6. **Réduction des symétries.** Soit E un espace vectoriel de dimension 2 et $s \in \mathscr{L}(E)$.

   (a) **Question de cours.** On suppose $s^2 = \mathrm{id}_E$. Montrer que $E = E_1(s) \oplus E_{-1}(s)$.

   Aller voir le cours : on montre par analyse et synthèse que $x = \underbrace{\dfrac{x + s(x)}{2}}_{\in E_1(s)} + \underbrace{\dfrac{x - s(x)}{2}}_{\in E_{-1}(s)}$ *est **la** décomposition d'un vecteur quelconque* $x \in E$.

   (b) On suppose $s^2 = \mathrm{id}_E$ et que l'endomorphisme s n'est pas une homothétie. Construire une base $\mathscr{B} = (v, w)$ de E telle que $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(s) = S$.

   Sous-espace vectoriel du plan E, *l'espace propre* $E_1(s)$ *est* a priori *de dimension* 0, 1 *ou* 2.

   S'il était de dimension 2, *on aurait* $E_1(s) = E$ *par inclusion et égalité des dimensions, c'est-à-dire* $s = \mathrm{id}_E$. *Dualement, si* $E_1(s)$ *était trivial, on aurait* $E_{-1}(s) = E$ *par inclusion et égalité des dimensions, et* $s = -\mathrm{id}_E$. *Puisque l'énoncé exclut que* s *puisse être une homothétie, ces deux cas sont exclus et l'on a* $\dim E_1(s) = 1$, *d'où l'on tire* $\dim E_{-1}(s) = 1$.

   On peut donc trouver une base (v) *de la droite* $E_1(s)$ *et une base* (w) *de la droite* $E_{-1}(s)$. *La concaténation* $\mathscr{B} = (v, w)$ *est alors une base de* $E = E_1(s) \oplus E_{-1}(s)$.

   Vu qu'ils appartiennent aux deux espaces propres, on a enfin $s(v) = v$ *et* $s(w) = -w$, *ce qui permet de calculer la matrice* $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(s) = \mathrm{diag}(1, -1) = S$.

(c) En utilisant la question précédente, montrer que les matrices S et T sont semblables.

Soit s *l'endomorphisme canoniquement associé à* T. *Notons* $E = K^2$ *pour coller aux notations précédentes : on a* $s \in \mathscr{L}(E)$. *Comme* $T^2 = I_2$ *(et que « composer, c'est multiplier »), cet endomorphisme vérifie* $s^2 = \mathrm{id}_E$*, c'est-à-dire qu'il s'agit d'une symétrie de* E. *Si* s *était une homothétie, sa matrice dans toute base serait scalaire, ce qui n'est manifestement pas le cas de* T.

On peut donc appliquer la question précédente et obtenir l'existence d'une base $\mathscr{B}$ *dans laquelle la matrice de* s *est* S. *Comme sa matrice dans la base canonique est* T*, les deux matrices* S *et* T *sont semblables.*

7. **Endomorphismes anticommutant.** Soit E un espace vectoriel et $u, v \in \mathscr{L}(E)$. On suppose que u et v *anticommutent*, c'est-à-dire que $u \circ v + v \circ u = 0_{\mathscr{L}(E)}$.

(a) Montrer que $\forall \lambda \in K, \forall x \in E_\lambda(u), v(x) \in E_{-\lambda}(u)$.

Soit $\lambda \in K$ *et* $x \in E_\lambda(u)$. *On a*

$$u\big(v(x)\big) = -v\big(u(x)\big) = -v(\lambda x) = -\lambda\, v(x),$$

ce qui prouve que $v(x) \in E_{-\lambda}(u)$.

(b) Soit $\lambda \in K$. Quels sont les endomorphismes anticommutant avec l'homothétie $\lambda\, \mathrm{id}_E$?

- *Si* $\lambda = 0$*, l'homothétie* $\lambda\, \mathrm{id}_E$ *est l'endomorphisme nul et tout endomorphisme anticommute avec lui.*
- *Supposons* $\lambda \neq 0$ *et soit* $v \in \mathscr{L}(E)$ *anticommutant avec* $u = \lambda\, \mathrm{id}_E$.

  Pour tout $x \in E$*, la relation* $u \circ v + v \circ u = 0_{\mathscr{L}(E)}$ *s'évalue en* $\lambda\, v(x) + v(\lambda x) = 0$*, c'est-à-dire en* $2\lambda\, v(x) = 0_E$. *Comme* $2\lambda \neq 0$*, on en déduit* $v(x) = 0$.

  La réciproque étant immédiate, on a montré que seul l'endomorphisme nul anticommutait avec les homothéties non nulles.

8. Dans cette question, on fixe un morphisme d'algèbres $\varphi : M_2(K) \to M_2(K)$.

On note s (resp. t) l'endomorphisme de $E = K^2$ canoniquement associé à $\varphi(S)$ (resp. $\varphi(T)$).

(a) Montrer que s et t sont deux symétries de E qui anticommutent.

- *Comme* φ *est un morphisme d'algèbres, on a*

$$\varphi(S)^2 = \varphi(S^2) = \varphi(I_n) = I_n.$$

  Puisque « composer, c'est multiplier », on en déduit que s *vérifie la relation* $s^2 = \mathrm{id}_E$. *Il s'agit donc d'une symétrie.*
- *Puisque* $T^2 = I_n$*, le même argument fonctionne pour* t.
- *Enfin, on a de même*

$$\varphi(S)\varphi(T) + \varphi(T)\varphi(S) = \varphi(ST) + \varphi(TS) = \varphi(ST + TS) = \varphi(0_n) = 0_n,$$

  donc $s \circ t + t \circ s = 0_{\mathscr{L}(E)}$ *: les deux symétries anticommutent.*

(b) Montrer que $\dim E_1(s) = 1$.

Supposons par l'absurde $\dim E_1(s) \neq 1$. *Comme à la question 6b, on en déduit que la symétrie* s *est une homothétie* $\pm\, \mathrm{id}_E$.

D'après la question 7b, cela entraînerait que t *soit l'endomorphisme nul, ce qui contredit le fait que* t *doit être une symétrie.*

Ainsi, on a nécessairement $\dim E_1(s) = 1$.

(c) On fixe un vecteur $v_1 \in E$ tel que $E_1(s) = \mathrm{Vect}(v_1)$, et on pose $v_2 = t(v_1)$, puis $\mathscr{B} = (v_1, v_2)$.

Montrer que $\mathscr{B}$ est une base de E.

Par définition, $v_1 \in E_1(s)$. La question 7a permet d'en déduire que $v_2 \in E_{-1}(s)$. Pour montrer la liberté de (v_1, v_2) il suffit de montrer que les deux vecteurs ne sont pas nuls, car il s'agira alors de vecteurs propres associés à des valeurs propres différentes.

Le fait que $E_1(s)$ soit de dimension 1 montre déjà v_1 ne peut pas être nul. Puisque t est une symétrie (et en particulier un automorphisme), on en déduit que $v_2 = t(v_1)$ est également non nul.

Comme $\dim E = 2$, $\mathscr{B}$ est bien une base de E.

(d) Montrer $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(s) = S$ et $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(t) = T$.

- *On a vu à la question précédente que $v_1 \in E_1(s)$ et $v_2 \in E_{-1}(s)$. Cela montre directement $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(s) = \mathrm{diag}(1, -1) = S$.*
- *Pour la deuxième matrice, on a déjà $v_2 = t(v_1)$. Pour finir, $t(v_2) = t^2(v_1) = v_1$, ce qui montre que $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(t) = T$.*

(e) En déduire qu'il existe une matrice $P \in GL_2(K)$ telle que $\forall A \in M_2(K), \varphi(A) = PAP^{-1}$.

Notons P la matrice de passage de la base canonique de E (que l'on notera $\mathscr{B}_c$) vers la base $\mathscr{B}$. Pour tout endomorphisme $u \in \mathscr{L}(E)$, on aura donc $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_c}(u) = P\,\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u)P^{-1}$.

En appliquant cette propriété à s, il vient $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_c}(s) = P\,\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(s)P^{-1}$, c'est-à-dire $\varphi(S) = PSP^{-1}$. De la même façon, en l'appliquant à t, il vient $\varphi(T) = PTP^{-1}$.

Les deux morphismes d'algèbres $\varphi, \mathrm{ad}_P : M_2(K) \to M_2(K)$ coïncident donc sur S et T. Comme il s'agit de morphismes d'algèbres, ils coïncident donc aussi sur I_2 et ST.

Or, un morphisme d'algèbres est entre autres une application linéaire. Maintenant que φ et ad_P coïncident sur les quatre vecteurs de la base (I_2, S, T, ST), on sait que $\varphi = \mathrm{ad}_P$ par prolongement des identités, ce qui est une reformulation de la question.

Partie III. Le cas général.

Dans cette partie, on fixe un espace vectoriel E de dimension n et $p, r \in \mathscr{L}(E)$ tels que

$$p^2 = p \qquad \text{et} \qquad r^n = \mathrm{id}_E \qquad \text{et} \qquad \mathrm{id}_E = \sum_{k=0}^{n-1} r^k \circ p \circ r^{-k}.$$

9. Montrer que r est un automorphisme de E.

Rappelons que dans le préambule du problème, n est au moins égal à 2.

La relation $r^n = \mathrm{id}_E$ se réécrit $r^{n-1} \circ r = r \circ r^{n-1}$, donc elle montre que r est un automorphisme, d'inverse r^{n-1}.

Remarquons que cette vérification était nécessaire pour que la troisième condition ait un sens.

10. **Trace d'un endomorphisme.** Soit $u \in \mathscr{L}(E)$.

(a) Soit $\mathscr{B}$ une base de E. Montrer que la trace $\mathrm{tr}\big(\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u)\big)$ ne dépend pas du choix de $\mathscr{B}$.

Soit $\mathscr{C}$ une base de E et $P = P_{\mathscr{B} \to \mathscr{C}} \in GL_n(K)$ la matrice de passage. En notant $M = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u)$ et $M' = \mathrm{Mat}_{\mathscr{C}}(u)$, on a $M' = P^{-1}MP$, donc, par cyclicité de la trace,

$$\mathrm{tr}\, M' = \mathrm{tr}(P^{-1}MP) = \mathrm{tr}\big(PP^{-1}M\big) = \mathrm{tr}\, M.$$

Dans la suite, on appelle *trace de l'endomorphisme* u, et on note simplement $\operatorname{tr}(u)$, cette trace.

(b) Montrer que tr est une forme linéaire sur $\mathscr{L}(E)$ vérifiant $\forall u, v \in \mathscr{L}(E), \operatorname{tr}(u \circ v) = \operatorname{tr}(v \circ u)$.

Les deux propriétés viennent immédiatement des propriétés correspondantes de la trace matricielle, de la linéarité de $u \mapsto \operatorname{Mat}_{\mathscr{B}}(u)$, et de la propriété « composer c'est multiplier ».

11. Montrer que la trace d'un projecteur est égale à son rang.

Soit $p \in \mathscr{L}(E)$ un projecteur, dont on notera s le rang.

On sait que $E = E_1(p) \oplus \ker p$, si bien que $\dim \ker p = n - s$ (on aurait aussi pu appliquer la formule du rang). En concaténant une base $(e_1, \dots, e_s)$ de $E_1(p) = \operatorname{im} p$ et une base $(e_{s+1}, \dots, e_n)$ de $\ker p$, on obtient une base $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_s, e_{s+1}, \dots, e_n)$ adaptée à la décomposition.

Pour tout $j \leqslant s$, on a $e_j \in E_1(p)$, donc $p(e_j) = e_j$. Pour tout $j > s$, on a $e_j \in \ker p$ donc $p(e_j) = 0_E$. Cela montre que $\operatorname{Mat}_{\mathscr{B}}(p) = \begin{pmatrix} I_s & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} =: J_s$.

Par définition, on a alors $\operatorname{rg} p = \operatorname{rg} J_s = s$ (les s premières colonnes forment une famille libre et les suivantes sont nulle, donc les s premières colonnes forment une base de $\operatorname{im} J_s$).

12. Pour tout $k \in \mathbb{Z}$, on notera $p_k = r^k \circ p \circ r^{-k}$, si bien que $p = p_0$.

Montrer que pour tout $k \in \mathbb{Z}$, p_k est un projecteur de rang 1.

Conformément à l'indication, on remarque que pour tout $k \in \mathbb{Z}$,

- *l'endomorphisme p_k est un projecteur :* $p_k^2 = r^k \circ p \circ r^{-k} \circ r^k \circ p \circ r^{-k} = r^k \circ \underbrace{p^2}_{=p} \circ r^{-k} = p_k$;
- *que son rang est égal à celui de p et donc indépendant de k :*

$$\operatorname{rg} p_k = \operatorname{tr} p_k = \operatorname{tr}\big(r^k \circ p \circ r^{-k}\big) = \operatorname{tr}\big(r^{-k} \circ r^k \circ p\big) = \operatorname{tr} p = \operatorname{rg} p.$$

En appliquant la linéarité de la trace, on a en outre

$$n = \operatorname{tr} \operatorname{id}_E = \sum_{k=0}^{n-1} \operatorname{tr} p_k = n \ \operatorname{tr} p = n \ \operatorname{rg} p,$$

d'où l'on tire $\operatorname{rg} p = 1$, et donc $\forall k \in \mathbb{Z}, \operatorname{rg} p_k = 1$.

La question précédente permet donc notamment de fixer un vecteur e_0 tel que (e_0) soit une base de $\operatorname{im} p = \operatorname{im} p_0$. On définit ensuite, pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $e_k = r^k(e_0)$ (notons que cette définition reste compatible avec la précédente si $k = 0$).

13. Soit $k \in \mathbb{Z}$. Montrer que $\operatorname{im} p_k = \operatorname{Vect}(e_k)$.

Déjà, comme r est un automorphisme et que e_0 n'est pas nul, il en va de même de $e_k = r^k(e_0)$, si bien que $\operatorname{Vect}(e_k)$ est une droite.

Ensuite, $\operatorname{im}(p \circ r^{-k}) \subseteq \operatorname{im} p = \operatorname{Vect}(e_0)$. On en déduit que $\operatorname{im}(p_k) \subseteq \operatorname{Vect}(e_k)$: soit $y \in \operatorname{im} p_k$. On peut trouver $x \in E$ tel que $y = p_k(x) = r^k\big(\underbrace{p(r^{-k}(x))}_{\in \operatorname{Vect}(e_0)}\big) \in \operatorname{Vect}\big(r^k(e_0)\big) = \operatorname{Vect}(e_k)$.

Mais la question précédente montre que $\operatorname{im} p_k$ est de dimension $\operatorname{rg} p_k = 1$, donc on a $\operatorname{im} p_k = \operatorname{Vect}(e_k)$ par inclusion et égalité des dimensions.

14. Montrer que $\mathscr{B} = (e_0, e_1, \dots, e_{n-1})$ est une base de E.

La famille $\mathscr{B}$ possédant n vecteurs, il suffit de montrer qu'elle engendre E.

Soit $x \in E$. *On a* $x = \mathrm{id}_E(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} (r^k \circ p \circ r^{-k})(x)$.

Pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, *on a* $(r^k \circ p \circ r^{-k})(x) = p_k(x) \in \operatorname{im} p_k = \mathrm{Vect}(e_k)$, *donc on peut trouver un scalaire* $\lambda_k \in K$ *tel que* $p_k(x) = \lambda_k\, e_k$.

On a donc obtenu la décomposition $x = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k\, e_k$, *ce qui montre* $x \in \mathrm{Vect}(\mathscr{B})$ *et conclut.*

15. Calculer $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(p)$ et $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(r)$.

- *Pour tout* $k \in [\![0, n-1]\!]$, *on a* $r(e_k) = e_{k+1}$. *En notant que* $e_n = e_0$ *(car* $r^n = \mathrm{id}_E$*), on obtient directement la matrice*

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(r) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix} = E_{1,n} + \sum_{k=0}^{n-2} E_{k+2,k+1}.$$

  Notons C *(comme cycle) cette matrice.*
- *Nous allons montrer* $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(p) = E_{1,1}$. *La première colonne vient simplement du fait que* $e_0 \in E_1(p)$, *donc* $p(e_0) = e_0$, *mais il faut encore montrer* $\forall k \in [\![1, n-1]\!], p(e_k) = 0_E$. *On va en fait montrer* $\forall k \in [\![1, n-1]\!], p(e_{n-k}) = 0_E$, *ce qui revient au même.*

  Pour cela, injectons e_0 *dans la formule* $\mathrm{id}_E = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} r^k \circ p \circ r^{-k}$. *Il vient*

$$e_0 = \sum_{k=0}^{n-1} r^k\big(p\big(r^{-k}(e_0)\big)\big) = \underbrace{p(e_0)}_{=e_0} + \sum_{k=1}^{n-1} r^k\big(p\big(r^{-k}(e_0)\big)\big).$$

  Comme dans la question précédente, on peut trouver pour tout $k \in [\![1, n-1]\!]$ *un scalaire* $\lambda_k \in K$ *tel que* $r^k\big(p\big(r^{-k}(e_0)\big)\big) = \lambda_k\, e_k$, *si bien que* $e_0 = e_0 + \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} \lambda_k\, e_k$. *Par liberté de* $\mathscr{B}$, *on en déduit que pour tout* $k \geqslant 1$, *on a* $\lambda_k = 0$.

  Fixons maintenant $k \in [\![1, n-1]\!]$. *On vient de dire que* $\lambda_k = 0$, *c'est-à-dire* $r^k\big(p\big(r^{-k}(e_0)\big)\big) = 0_E$. *Comme* r *est un automorphisme, il en va de même de* r^k, *si bien que* $p\big(r^{-k}(e_0)\big) = 0_E$ *et donc, en notant que* $r^{-k}(e_0) = r^{n-k}(e_0) = e_{n-k}$, *que* $p(e_{n-k}) = 0_E$, *ce qui conclut cette démonstration.*

16. Soit $\varphi : M_n(K) \to M_n(K)$ un morphisme d'algèbres. Montrer qu'il existe $P \in GL_n(K)$ telle que $\forall A \in M_n(K), \varphi(A) = PAP^{-1}$.

On reprend la notation $C = E_{1,n} + \displaystyle\sum_{k=0}^{n-2} E_{k+2,k+1}$ *de la question précédente. Soit* $\varphi : M_n(K) \to M_n(K)$ *un morphisme d'algèbres.*

Un calcul un peu pénible (qui devient plus sympathique si on convient de numéroter les indices de lignes et de colonnes de 0 *à* $n-1$, *avec la convention que les indices sont à entendre modulo* n*) montre que ces deux matrices vérifient les conditions*

$$E_{1,1}^2 = E_{1,1}, \qquad C^n = I_n \qquad \text{et} \qquad I_n = \sum_{k=0}^{n-1} C^k\, E_{1,1}\, C^{-k}.$$

Leurs images par le morphisme φ *vérifient alors les mêmes relations. En notant* p *(resp.* r*) l'endomorphisme canoniquement associé à* $\varphi(E_{1,1})$ *(resp.* $\varphi(C)$*), on obtient donc deux endomorphismes de l'espace vectoriel* $E = K^n$ *vérifiant*

$$p^2 = p, \qquad r^n = \mathrm{id}_E \qquad \text{et} \qquad \mathrm{id}_E = \sum_{k=0}^{n-1} r^k \circ p \circ r^{-k}.$$

D'après la question précédente, on peut trouver une base $\mathscr{B}$ *dans laquelle les matrices de* p *et* r *sont* $E_{1,1}$ *et* C*, respectivement. En notant* $P = P_{\mathscr{B}_c \to \mathscr{B}} \in GL_n(K)$ *la matrice de passage, on a donc montré que les morphismes d'algèbres* $\varphi, \mathrm{ad}_P : M_n(K) \to M_n(K)$ *coïncidaient sur* $E_{1,1}$ *et* C.

Comme dans la dernière question de la deuxième partie, il reste à montrer que la propriété multiplicative des morphismes d'algèbres permet d'étendre cette coïncidence à une famille qui engendre $M_n(K)$*, en l'occurrence la base canonique de* $M_n(K)$.

Pour cela, il suffit de constater (et de démontrer proprement) que $\forall i, j \in [\![1, n]\!], E_{i,j} = C^{i-1} E_{1,1} C^{1-j}$*, ce que je vous laisse vérifier courageusement.*