Huitième composition de mathématiques

Durée : *4 heures.*

Toute sortie est interdite pendant les dix dernières minutes.

*Les documents, calculatrices, etc. sont **interdits**.*

Consignes générales de présentation

La présentation de la copie est prise en compte dans l'évaluation.

- *Ne composez pas sur la première page, ce qui me permettra d'écrire mes commentaires.*
- *Merci d'encadrer ou de souligner vos résultats.*
- *Numérotez vos copies doubles, et rendez-les dans l'ordre, la première servant de chemise pour les suivantes, qui ne seront pas imbriquées les unes dans les autres.*
- *Les parties trop difficiles à lire de votre copie ne seront pas lues.*

Exercice 1. Interro de calcul du ~~vendredi~~ samedi.

Les trois questions de cet exercice sont indépendantes.

Dans tous les cas, vous devriez trouver des expressions raisonnablement simples. Disons pour fixer les idées que $\frac{\pi}{6} + \sqrt{3}$ *est possible, mais* $\arcsin\left(\operatorname{th}\left(\pi - \sqrt{2}\right)\right)$ *ne l'est pas.*

1. Calculer $\displaystyle\int_0^1 x^3 \exp(x^2)\,dx$.
2. Calculer $\displaystyle\int_0^{\ln(2+\sqrt{3})} \frac{\operatorname{sh}(x)}{\operatorname{ch}(x)^2 + \operatorname{ch}(x)}\,dx$.
3. On pose $I = \displaystyle\int_{-1}^1 \frac{dx}{(1+e^x)(1+x^2)}$.
   (a) À l'aide du changement de variables $y = -x$, obtenir une autre expression pour I.
   (b) Simplifier $I + I$, et en déduire la valeur de I.

Exercice 2. Algèbre linéaire.

Les trois questions de cet exercice sont indépendantes.

1. Soit E un espace vectoriel de dimension n et I, K deux sous-espaces vectoriels de E.

   Montrer l'équivalence

$$\left(\exists u \in \mathscr{L}(E) : \operatorname{im} u = I \text{ et } \ker u = K\right) \Leftrightarrow \dim I + \dim K = n.$$

2. Soit E un espace vectoriel de dimension n et $v_1, \ldots, v_{n+2} \in E$.

   Montrer qu'il existe $\alpha_1, \ldots, \alpha_{n+1}, \alpha_{n+2} \in \mathbb{K}$ non tous nuls tels que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n+2} \alpha_k = 0$ et $\displaystyle\sum_{k=1}^{n+2} \alpha_k v_k = 0_E$.

3. Soit E un espace vectoriel de dimension finie.
   (a) Soit $f, g \in \mathscr{L}(E)$. Montrer le **lemme de Weyr** : $\dim f\left[\ker(g \circ f)\right] = \operatorname{rg} f - \operatorname{rg}(g \circ f)$.
   (b) En déduire l'**inégalité de Frobenius** :

$$\forall u, v, w \in \mathscr{L}(E), \operatorname{rg}(w \circ v \circ u) \geqslant \operatorname{rg}(w \circ v) + \operatorname{rg}(v \circ u) - \operatorname{rg} v.$$

   (c) Soit $u \in \mathscr{L}(E)$. Démontrer l'inégalité de convexité des rangs itérés :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \operatorname{rg} u^{n+1} - \operatorname{rg} u^{n+2} \leqslant \operatorname{rg} u^n - \operatorname{rg} u^{n+1}.$$

Problème. Théorème de Skolem-Noether pour $M_n(K)$.

Le corps des scalaires K sera $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Toutes les notions d'algèbre linéaire ((sous-)espaces vectoriels, applications linéaires, etc.) seront relatives au corps K. On fixe un entier $n \geqslant 2$.

Partie I. Généralités et but du problème.

Définition. Un *morphisme d'algèbres* $M_n(K) \to M_n(K)$ est un endomorphisme φ de $M_n(K)$ vérifiant

(i) $\varphi(I_n) = I_n$;

(ii) $\forall A, B \in M_n(K), \varphi(AB) = \varphi(A)\,\varphi(B)$.

1. Montrer que les applications suivantes ne sont pas des morphismes d'algèbres $M_n(K) \to M_n(K)$.
   (a) $\tau : \begin{cases} M_n(K) \to M_n(K) \\ \quad A \quad \mapsto \quad A^T. \end{cases}$
   (b) $q : \begin{cases} M_n(K) \to M_n(K) \\ \quad A \quad \mapsto \quad A^2. \end{cases}$
   (c) $\kappa : \begin{cases} M_n(K) \to M_n(K) \\ \quad A \quad \mapsto (A^{-1})^T. \end{cases}$
2. Soit $P \in GL_n(K)$. Montrer que $\mathrm{ad}_P : \begin{cases} M_n(K) \to M_n(K) \\ \quad A \quad \mapsto PAP^{-1} \end{cases}$ est un morphisme d'algèbres.
3. Construire deux matrices $P, Q \in GL_n(K)$ telles que $\mathrm{ad}_P = \mathrm{ad}_Q$.

Le but du problème est de montrer que tous les morphismes d'algèbres $M_n(K) \to M_n(K)$ sont de la forme décrite à la question 2. C'est un cas particulier d'un théorème dû (indépendamment) à Thoralf Skolem et Emmy Noether.

Partie II. Le cas $n = 2$ par les symétries anticommutant.

Pour tout $\lambda \in K$ et tout endomorphisme u d'un espace vectoriel E, on utilisera la notation habituelle pour les espaces propres : $E_\lambda(u) = \ker\big(u - \lambda\, \mathrm{id}_E\big)$.

4. **Théorème de Cayley-Hamilton pour les matrices d'ordre** 2. Soit $A \in M_2(K)$.
   Trouver $\delta \in K$ tel que $A^2 - \mathrm{tr}(A)\, A + \delta\, I_2 = 0_2$.
5. **Les matrices** S **et** T. Dans cette partie, on note $S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ et $T = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.
   (a) En utilisant la question précédente, montrer que $S^2 = T^2 = I_2$.
   (b) Calculer le produit ST, le produit TS, et montrer que (I_2, S, T, ST) est une base de $M_2(K)$.
6. **Réduction des symétries.** Soit E un espace vectoriel de dimension 2 et $s \in \mathscr{L}(E)$.
   (a) **Question de cours.** On suppose $s^2 = \mathrm{id}_E$. Montrer que $E = E_1(s) \oplus E_{-1}(s)$.
   (b) On suppose $s^2 = \mathrm{id}_E$ et que l'endomorphisme s n'est pas une homothétie. Construire une base $\mathscr{B} = (v, w)$ de E telle que $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(s) = S$.
   (c) En utilisant la question précédente, montrer que les matrices S et T sont semblables.
7. **Endomorphismes anticommutant.** Soit E un espace vectoriel et $u, v \in \mathscr{L}(E)$. On suppose que u et v *anticommutent*, c'est-à-dire que $u \circ v + v \circ u = 0_{\mathscr{L}(E)}$.
   (a) Montrer que $\forall \lambda \in K, \forall x \in E_\lambda(u), v(x) \in E_{-\lambda}(u)$.
   (b) Soit $\lambda \in K$. Quels sont les endomorphismes anticommutant avec l'homothétie $\lambda\, \mathrm{id}_E$?

8. Dans cette question, on fixe un morphisme d'algèbres $\varphi : M_2(K) \to M_2(K)$.

   On note s (resp. t) l'endomorphisme de $E = K^2$ canoniquement associé à $\varphi(S)$ (resp. $\varphi(T)$).

   (a) Montrer que s et t sont deux symétries de E qui anticommutent.
   (b) Montrer que $\dim E_1(s) = 1$.
   (c) On fixe un vecteur $v_1 \in E$ tel que $E_1(s) = \mathrm{Vect}(v_1)$, et on pose $v_2 = t(v_1)$, puis $\mathscr{B} = (v_1, v_2)$.

       Montrer que $\mathscr{B}$ est une base de E.
   (d) Montrer $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(s) = S$ et $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(t) = T$.
   (e) En déduire qu'il existe une matrice $P \in GL_2(K)$ telle que $\forall A \in M_2(K), \varphi(A) = PAP^{-1}$.

Partie III. Le cas général.

Dans cette partie, on fixe un espace vectoriel E de dimension n et $p, r \in \mathscr{L}(E)$ tels que

$$p^2 = p \qquad \text{et} \qquad r^n = \mathrm{id}_E \qquad \text{et} \qquad \mathrm{id}_E = \sum_{k=0}^{n-1} r^k \circ p \circ r^{-k}.$$

9. Montrer que r est un automorphisme de E.

   Remarquons que cette vérification était nécessaire pour que la troisième condition ait un sens.
10. **Trace d'un endomorphisme.** Soit $u \in \mathscr{L}(E)$.
    (a) Soit $\mathscr{B}$ une base de E. Montrer que la trace $\mathrm{tr}\big(\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u)\big)$ ne dépend pas du choix de $\mathscr{B}$.

    Dans la suite, on appelle *trace de l'endomorphisme* u, et on note simplement $\mathrm{tr}(u)$, cette trace.
    (b) Montrer que tr est une forme linéaire sur $\mathscr{L}(E)$ vérifiant $\forall u, v \in \mathscr{L}(E), \mathrm{tr}(u \circ v) = \mathrm{tr}(v \circ u)$.
11. Montrer que la trace d'un projecteur est égale à son rang.
12. Pour tout $k \in \mathbb{Z}$, on notera $p_k = r^k \circ p \circ r^{-k}$, si bien que $p = p_0$.

    Montrer que pour tout $k \in \mathbb{Z}$, p_k est un projecteur de rang 1.

    Indication. *On pourra commencer par montrer que tous ces projecteurs ont le même rang, avant de chercher à le déterminer.*

La question précédente permet donc notamment de fixer un vecteur e_0 tel que (e_0) soit une base de $\mathrm{im}\, p = \mathrm{im}\, p_0$. On définit ensuite, pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $e_k = r^k(e_0)$ (notons que cette définition reste compatible avec la précédente si $k = 0$).

13. Soit $k \in \mathbb{Z}$. Montrer que $\mathrm{im}\, p_k = \mathrm{Vect}(e_k)$.
14. Montrer que $\mathscr{B} = (e_0, e_1, \ldots, e_{n-1})$ est une base de E.
15. Calculer $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(p)$ et $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(r)$.
16. Soit $\varphi : M_n(K) \to M_n(K)$ un morphisme d'algèbres. Montrer qu'il existe $P \in GL_n(K)$ telle que $\forall A \in M_n(K), \varphi(A) = PAP^{-1}$.

Emmy Noether (1882-1935)

Thoralf Skolem (1887-1963)