Matrices et systèmes linéaires

Thèmes

Dans tout le chapitre, $K = \mathbb{R}$ ou $K = \mathbb{C}$.

- Généralités : somme, produit (associativité, bilinéarité).
- Application linéaire $\varphi_A : K^p \to K^n$ canoniquement associée à $A \in M_{n,p}(K)$. Noyau et image d'une matrice, et caractérisation de l'injectivité/la surjectivité de φ_A.
- Transposée.
- Matrices élémentaires et leurs produits.
- Combinaison linéaire de matrices. Notation $\text{Vect}(\dots)$.
- Produit par blocs.
- Matrices carrées.
- Matrices inversibles. Propriétés de stabilité de $GL_n(K)$.
- Critère d'inversibilité et inverse éventuel des matrices 2×2.
- « Critère nucléaire d'inversibilité », admis pour le moment. Conséquence sur l'inversibilité à gauche/à droite des matrices. Pour une matrice carrée A, φ_A est injective (resp. surjective) si et seulement si elle est bijective, c'est-à-dire si et seulement si A est inversible.
- Puissances. Binôme de Newton.
- Trace : linéarité et cyclicité.
- Stabilité par somme de $S_n(K)$ et $A_n(K)$. Par somme et par produit de $D_n(K)$ et $T_n^{\pm}(K)$.
- Systèmes linéaires : vocabulaire (coefficients, matrices, second membre, homogène, compatible...). Structure de l'ensemble des solutions.
- Résolution par le pivot de Gauss. Interprétations en termes des matrices d'opérations élémentaires.
- Systèmes de Cramer.
- Calcul pratique de l'inverse.
- Critère d'inversibilité des matrices triangulaires et donc des matrices diagonales.

Questions de cours

- L'application linéaire φ_A est injective si et seulement si $\ker A = \{0_{K^p}\}$.
- Cyclicité de la trace.
- Inversibilité et inverse éventuel des matrices 2×2.
- Inversibilité à gauche, à droite, tout court.
- A inversible $\Leftrightarrow$ φ_A bijective $\Leftrightarrow$ φ_A injective $\Leftrightarrow$ φ_A surjective.