
Suites

Thèmes

- ▶ Généralités : monotonie, caractère borné. Propriétés vraies à partir d'un certain rang (dont « stationnaire » = « constant à pcr »).
- ▶ Premières suites récurrentes : suites arithmétiques, géométriques, arithmético-géométriques. Suites récurrentes linéaires d'ordre 2.
- ▶ Convergence, définition et premières propriétés : unicité de la limite, caractère asymptotique, convergente implique bornée, principe d'encadrement.
- ▶ Limites et inégalités : $]c, +\infty[$ est ouvert et passage à la limite dans les inégalités larges.
- ▶ Suites tendant vers $\pm\infty$. Unicité de la limite dans $\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$.
- ▶ Théorèmes de convergence :
 - théorèmes d'opérations ;
 - théorème de la limite monotone, suites adjacentes ;
 - théorème des gendarmes, de minoration, de majoration.
- ▶ Démonstration de la caractérisation séquentielle de l'adhérence.
- ▶ Extension aux suites à valeurs complexes (et notamment équivalence des deux définitions naturelles de la convergence dans $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$).
- ▶ Suites extraites : si $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} l$, alors $u_{\varphi(n)} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} l$; si $u_{2n} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} l$ et $u_{2n+1} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} l$, alors $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} l$. Application à la divergence de la série harmonique. Traité en complément : théorème de Bolzano-Weierstrass.
- ▶ Analyse asymptotique : notations o, O, \sim .
- ▶ Complément : théorème de Cesàro et lemme de l'escalier.
- ▶ Suites récurrentes $u_{n+1} = f(u_n)$: réflexes de base. On a traité en cours un exemple avec une itératrice croissante et un avec une itératrice décroissante (au moins en restriction à un intervalle stable). On a également traité trois exemples de nature asymptotique : deux équivalents de suites récurrentes ($u_{n+1} = \sin u_n$ et $u_{n+1} = u_n + e^{-u_n}$) et un développement asymptotique d'une suite implicite ($u_n + e^{u_n} = n$).

Questions de cours

- ▶ Toute suite convergente est bornée (y compris le lemme).
- ▶ $]c, +\infty[$ est ouvert.
- ▶ Passage à la limite dans les inégalités larges.
- ▶ Caractérisation séquentielle de l'adhérence.
- ▶ Divergence de la série harmonique : $H_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} +\infty$.