Espaces vectoriels

Thèmes

- Espaces vectoriels sur un corps $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. Règles de calcul. Notion de combinaison linéaire.
- Familles de vecteurs : sous-espace vectoriel engendré, familles libres, liées. Condition de liberté pour des familles de $\leqslant 2$ vecteurs. Notion de base. Coordonnées d'un vecteur dans une base.
- Sous-espaces vectoriels : définition, stabilité par combinaison linéaire. Premiers exemples généraux : sous-espace vectoriel engendré, intersection de sous-espaces vectoriels.
- Familles échelonnées de polynômes, y compris « au sens fort ».
- Somme de sous-espaces vectoriels. Somme directe, sous-espaces supplémentaires. Bases adaptées à une décomposition en somme directe.
- Applications linéaires : définition, $\mathcal{L}(E, F)$ est un sous-espace vectoriel de F^E, stabilité par composition, bilinéarité de la composition. Noyaux et images, caractérisation de l'injectivité et la surjectivité. Structure de l'ensemble $\{x \in E \,|\, f(x) = y\}$ des solutions d'une équation linéaire. Isomorphismes.
- Endomorphismes : puissances, commutation (dont binôme de Newton et le lemme de stabilité), automorphismes et $GL(E)$.
- Prolongement des identités. Caractérisation de l'injectivité, la surjectivité, le fait d'être un isomorphisme par l'image d'une base. Construction basique d'une application linéaire.
- Projecteurs et symétries.

Questions de cours

- Une famille est libre si et seulement si aucun vecteur n'est combinaison linéaire des autres.
- $M_n(\mathbb{K}) = S_n(\mathbb{K}) \oplus A_n(\mathbb{K})$.
- Si $E = F \oplus G$, la concaténation d'une base de F et d'une base de G donne une base de E.
- Si $(e_1, \dots, e_n)$ est une base de E, $E = \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_r) \oplus \mathrm{Vect}(e_{r+1}, \dots, e_n)$.
- Prolongement des identités.
- Soit $p \in \mathcal{L}(E)$ tel que $p^2 = p$. Alors $\ker(p)$ et $E_1(p) = \{x \in E \,|\, p(x) = x\}$ sont supplémentaires.