Dimension des espaces vectoriels

Thèmes

- Toute l'algèbre linéaire précédente.
- Une sous-famille d'une famille libre est libre. Une sur-famille d'une famille génératrice est génératrice. « Lemme de précipitation. »
- Théorème de la base intermédiaire et corollaires : théorème de la base extraite, théorème de la base incomplète.
- Lemme de l'échange de Steinitz.
- Espaces vectoriels de dimension finie, dimension. Exemples standard : K^n, $M_{n,p}(K)$, $K_n[X]$.
- Familles de vecteurs et dimension : inégalité sur le nombre de vecteurs d'une famille libre (resp. génératrice). Équivalence entre la liberté et l'aspect générateur pour une famille de $n = \dim E$ vecteurs.
- Si F est un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel de dimension finie E, alors F est de dimension finie et $\dim F \leqslant \dim E$. Cas d'égalité. Existence de bases adaptées.
- Formule de Grassmann. Dimension d'un produit cartésien. Existence et dimension des supplémentaires.
- Caractérisations de la supplémentarité.
- Rang d'une famille $\mathcal{F}$ de n vecteurs de E : inégalité $\mathrm{rg}(\mathcal{F}) \leqslant \min\big(n, \dim E\big)$ et cas d'égalité.
- Applications linéaires et dimension : si $f \in \mathcal{L}(E, F)$ est injective (resp. surjective), alors $\dim E \leqslant \dim F$ (resp. $\dim F \leqslant \dim E$).
- Si $\dim E = \dim F$, l'injectivité équivaut à la surjectivité. Cas des endomorphismes.
- Si V est un sous-espace vectoriel de E, alors $\dim f[V] \leqslant \dim V$, et cas d'égalité.

Le théorème du rang n'est pas exigible cette semaine.

Questions de cours

- Lemme de précipitation.
- Soit $\mathcal{F}$ une famille de n vecteurs de E. Si $\mathcal{F}$ est libre, alors $n \leqslant \dim E$.
  Dans le cas d'égalité, $\mathcal{F}$ est une base de E.
- Soit $\mathcal{F}$ une famille de n vecteurs de E. Si $\mathcal{F}$ est génératrice, alors $n \geqslant \dim E$.
  Dans le cas d'égalité, $\mathcal{F}$ est une base de E.
- Un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel de dimension finie est encore de dimension finie.
- Formule de Grassmann.
- Un exemple : utilisation de la dimension pour l'interpolation de Lagrange.