Ensembles

Opérations

Autocorrection A. ☑

Soit E et F deux ensembles. En revenant aux définitions de l'égalité et de l'inclusion, écrire des assertions quantifiées équivalentes à $E \not\subseteq F$ et à $E \neq F$.

Autocorrection B. ☑

Décrire explicitement $\mathcal{P}(\{1,2,3\})$. Exprimer chacun de ses éléments à partir de $A = \{1,2\}$ et $B = \{2,3\}$ en utilisant les opérations $\cup$, $\cap$ et $\setminus$.

Autocorrection C. ☑

Soit E un ensemble et $A, B, C \in \mathcal{P}(E)$ des parties de cet ensemble. Montrer les assertions suivantes.

(i) $A \cup (E \setminus A) = E$;

(ii) $(A \cap B) \cup (A \setminus B) = A$;

(iii) $(A \subseteq B \text{ et } B \subseteq C) \Rightarrow A \subseteq C$;

(iv) $A \subseteq B \Leftrightarrow E \setminus B \subseteq E \setminus A$.

Autocorrection D. ☑

Soit $a < b < c < d$ quatre réels. Dessiner, puis décrire sans démonstration les ensembles suivants.

(i) $[a,c] \cup [b,d]$;

(ii) $[a,c] \cap [b,d]$;

(iii) $[a,b] \cap [c,d]$;

(iv) $[a,c] \setminus [b,d]$;

(v) $[a,d] \setminus [b,c]$;

(vi) $[b,c] \setminus [a,d]$.

Exercice 1.

Soit Ω un ensemble et $A, B, C \subseteq \Omega$ trois parties. Montrer

(i) $A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \cup (A \cap C)$;

(ii) $(A \setminus B) \setminus (A \setminus C) = (A \cap C) \setminus B$.

Exercice 2.

Soit Ω un ensemble et $A, B, C \subseteq \Omega$ trois parties. On note $\overline{A} = \Omega \setminus A$ le complémentaire de A, et ainsi de suite. Simplifier les expressions suivantes.

(i) $(A \cap B) \cup (\overline{A} \cap B) \cup (A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap \overline{B})$;

(ii) $A \cup (\overline{A} \cap B) \cup (\overline{A} \cap \overline{B} \cap C)$.

Exercice 3. ☑

Soit Ω un ensemble. Si A et B sont des parties de Ω, on définit leur *différence symétrique*

$$A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A).$$

1. Illustrer cette notion sur un diagramme de Venn.
2. Montrer
$$\forall A, B \in \mathcal{P}(\Omega), A \triangle B = (A \cup B) \setminus (A \cap B).$$
3. Montrer les propriétés suivantes.
   (i) $\forall A \in \mathcal{P}(\Omega), A \triangle A = \varnothing$;
   (ii) $\exists E \in \mathcal{P}(\Omega) : \forall A \in \mathcal{P}(\Omega), A \triangle E = A$;
   (iii) $\forall A \in \mathcal{P}(\Omega), \exists B \in \mathcal{P}(\Omega) : A \triangle B = \varnothing$.

Produit cartésien

Exercice 4.

Soit X et Y deux ensembles, $A, B \in \mathcal{P}(X)$ et $C, D \in \mathcal{P}(Y)$ quatre parties. Démontrer les égalités suivantes.

$$(A \cap B) \times (C \cap D) = (A \times C) \cap (B \times D)\,;$$
$$(A \cup B) \times (C \cup D) = (A \times C) \cup (A \times D) \cup (B \times C) \cup (B \times D).$$

Illustrer ces égalités dans le cas où $X = Y = \mathbb{R}$ et où A, B, C et D sont des intervalles de $\mathbb{R}$ bien choisis.

Exercice 5.

1. Soit B et C deux ensembles. Montrer l'équivalence

$$\mathbb{N} \times B \subseteq \mathbb{N} \times C \Leftrightarrow B \subseteq C.$$

2. Votre démonstration permet-elle de montrer plus généralement que si A, B et C sont trois ensembles, alors on a l'équivalence

$$A \times B \subseteq A \times C \Leftrightarrow B \subseteq C\,?$$

Plus informellement, « de quelle propriété de $\mathbb{N}$ a-t-on besoin pour la question précédente » ?

Exercice 6.

Soit A, B et C trois ensembles non vides tels que $A \times B \subseteq B \times C$. Montrer que $A \subseteq C$.

Exercice 7.

Soit Ω un ensemble et $E, F \in \mathcal{P}(\Omega)$ tels que $E \times F \subseteq (F \times \Omega) \cup (\Omega \times E)$. Montrer que $E \subseteq F$ ou $F \subseteq E$.

Ensemble des parties

Exercice 8.

Soit $E = \{0, 1, 2\}$. Les assertions suivantes sont-elles vraies ?

(i) $E \in \mathbb{N}$;	(iv) $E \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{N})$;	(vii) $\{1\} \in E$;	(x) $\varnothing \subseteq E$;
(ii) $E \subseteq \mathbb{N}$;	(v) $1 \in E$;	(viii) $\{1\} \subseteq E$;	(xi) $\varnothing \in \mathcal{P}(E)$;
(iii) $E \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$;	(vi) $1 \subseteq E$;	(ix) $\varnothing \in E$;	(xii) $\{\varnothing\} \subseteq E$.

Exercice 9.

Soit Ω un ensemble et $A, B \subseteq \Omega$ deux parties. Les ensembles $\mathcal{P}(A \cap B)$ et $\mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$ sont-ils égaux ? Même question pour $\mathcal{P}(A \cup B)$ et $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$.

Exercice 10$^+$.

On dit que deux parties de $[\![1, n]\!]$ sont *adjacentes* si l'on passe de l'une à l'autre en ajoutant ou en supprimant un unique élément.

1. Montrer qu'il est possible de lister les parties de $[\![1, n]\!]$ sous la forme $A_0, A_1, \ldots, A_{2^n-1}$ de telle sorte que pour tout $k \in [\![1, 2^n - 1]\!]$, A_{k-1} et A_k soient adjacentes et, qu'en outre A_{2^n-1} et A_0 soient adjacentes.
2. Montrer qu'on peut imposer en outre $A_0 = \varnothing$ et $\forall k \in [\![1, n]\!], A_k = [\![1, k]\!]$.

Implications et équivalences

Autocorrection E.

Soit Ω un ensemble et $A, B \subseteq \Omega$ deux parties. Donner des assertions simples équivalentes aux assertions suivantes.

(i) $\forall x \in \Omega, x \in A$ et $x \in B$;

(ii) $\forall x \in \Omega, x \in A$ ou $x \in B$;

(iii) $\forall x \in \Omega, x \in A \Rightarrow x \in B$;

(iv) $\forall x \in \Omega, x \in A \Leftrightarrow x \in B$;

(v) $\forall x \in \Omega, x \in A \Rightarrow x \notin B$.

(vi) $\forall x \in \Omega, x \in A$ ou $x \notin B$.

(vii) $\exists X \in \mathcal{P}(\Omega) \setminus \{\varnothing\}, A \cap X = \varnothing$.

(viii) $\forall X \in \mathcal{P}(\Omega), X \cap A \neq \varnothing \Rightarrow X \cap B \neq \varnothing$.

Autocorrection F.

Soit Ω un ensemble et $A, B, C \subseteq \Omega$ trois parties. On note $\overline{A} = \Omega \setminus A$ le complémentaire de A, et ainsi de suite. Montrer les équivalences suivantes.

(i) $A = B \Leftrightarrow A \cap B = A \cup B$;

(ii) $B \subseteq C \Leftrightarrow (A \cup B \subseteq A \cup C$ et $A \cap B \subseteq A \cap C)$;

(iii) $B = C \Leftrightarrow (A \cup B = A \cup C$ et $A \cap B = A \cap C)$;

(iv) $A \subseteq B \subseteq C \Leftrightarrow A \cup B = B \cap C$;

(v) $A \cap B = A \cap C \Leftrightarrow A \cap \overline{B} = A \cap \overline{C}$;

(vi) $A \subseteq B \Leftrightarrow \forall X \in \mathcal{P}(\Omega), A \cap X \subseteq B \cap X$.

Exercice 11.

Soit X un ensemble et $P(x)$ et $Q(x)$ deux assertions dépendant d'un élément $x \in X$.

Donner une assertion équivalente à $\forall x \in \{z \in X \,|\, P(z)\}, Q(x)$.

Exercice 12.

Soit Ω un ensemble et $A, B, C \subseteq \Omega$ trois parties. Montrer

(i) $(A = B$ ou $A = \varnothing$ ou $B = \varnothing) \Leftrightarrow \forall (x, y) \in A \times B, (y, x) \in A \times B$;

(ii) $A \cap B = \varnothing \Leftrightarrow \exists X \in \mathcal{P}(\Omega) : A \subseteq X$ et $X \setminus A = B$;

(iii) $A \cap B = \varnothing \Leftrightarrow \exists X \in \mathcal{P}(\Omega) : A \subseteq X$ et $B \subseteq (\Omega \setminus X)$;

(iv) $A \cup B = \Omega \Leftrightarrow \forall X \in \mathcal{P}(\Omega), X \cap A = \varnothing \Rightarrow X \subseteq B$;

(v) $A \subseteq B \cup C \Leftrightarrow \exists X \in \mathcal{P}(A) : X \subseteq B$ et $A \setminus X \subseteq C$;

(vi) $B \subseteq A \Leftrightarrow \forall Y \in \mathcal{P}(B), \exists X \in \mathcal{P}(A) : Y = X \cap B$;

(vii) $A \cap B = \varnothing \Leftrightarrow \forall X \in \mathcal{P}(A), \forall Y \in \mathcal{P}(B), \exists Z \in \mathcal{P}(\Omega) : X = A \cap Z$ et $Y = B \cap Z$.

Exercice 13.

Soit $A, B \subseteq \mathbb{N}$. Montrer les assertions suivantes.

(i) $A = (A \cap \{2n \,|\, n \in \mathbb{N}\}) \cup (A \cap \{2n+1 \,|\, n \in \mathbb{N}\})$;

(ii) $A = B \Leftrightarrow (\forall n \in \mathbb{N}, A \cup \{n\} = B \cup \{n\})$;

(iii) $A = B \Leftrightarrow (\forall n \in \mathbb{N}, A \cap [\![0, n]\!] = B \cap [\![0, n]\!])$.

La dernière assertion est-elle vraie si l'on remplace les deux symboles d'intersection par des unions ?

Mélange

Exercice 14.

Soit $A \subseteq \mathbb{Z}$ une partie non vide telle que $\forall n \in \mathbb{Z}, n \in A \Rightarrow (n-1 \in A$ et $n+1 \in A)$.

Montrer que $A = \mathbb{Z}$.

Exercice 15$^+$.

Soit Ω un ensemble et $A, B \subseteq \Omega$ deux parties.

1. Le but de cette question est de résoudre l'équation $A \cup X = B$ d'inconnue $X \in \mathcal{P}(\Omega)$, c'est-à-dire de déterminer toutes les parties $X \subseteq \Omega$ telles que $A \cup X = B$.
   (i) Donner une condition simple sur A et B équivalente à $\exists X \in \mathcal{P}(\Omega) : A \cup X = B$.
   (ii) On suppose dans cette question que la condition de la question précédente est remplie. Montrer que les ensembles $X \in \mathcal{P}(\Omega)$ tels que $A \cup X = B$ sont exactement les ensembles vérifiant $B \setminus A \subseteq X \subseteq B$.
2. Résoudre, de manière analogue, l'équation $A \cap X = B$ d'inconnue $X \in \mathcal{P}(\Omega)$.

Exercice 16.

Étant donné deux parties A et B de $\mathbb{R}$, on définit $A \boxplus B = \{a + b \mid (a, b) \in A \times B\}$.

1. Dans le cas particulier où $A = \{0, 1\}$ et $B = \{1, 4\}$, déterminer $A \boxplus B$.
2. Soit $A \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$ non vide. Montrer $A \boxplus \mathbb{R} = \mathbb{R}$.
3. (a) Montrer $\forall A_1, A_2, B \in \mathcal{P}(\mathbb{R}), (A_1 \cap A_2) \boxplus B \subseteq (A_1 \boxplus B) \cap (A_2 \boxplus B)$.
   (b) L'assertion $\forall A_1, A_2, B \in \mathcal{P}(\mathbb{R}), (A_1 \cap A_2) \boxplus B = (A_1 \boxplus B) \cap (A_2 \boxplus B)$ est-elle vraie ?

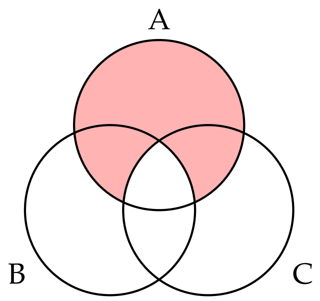
Exercice 17.

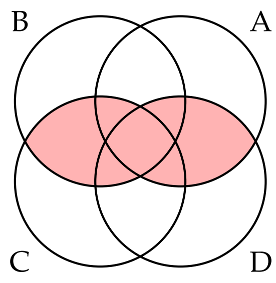
Pour toute partie $E \subseteq \mathbb{R}^2$, on définit $\widehat{E} = \{x \in \mathbb{R} \mid \exists y \in \mathbb{R} : (x, y) \in E\}$ et $\check{E} = \{x \in \mathbb{R} \mid \forall y \in \mathbb{R}, (x, y) \in E\}$.

1. Dessiner $H = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; xy \leqslant 1\right\}$, puis déterminer précisément $\widehat{H}$ et $\check{H}$.
2. (a) Montrer $\forall A, B \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^2), \widehat{A \cup B} = \widehat{A} \cup \widehat{B}$.
   (b) Montrer $\forall A, B \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^2), \widehat{A \cap B} \subseteq \widehat{A} \cap \widehat{B}$.
   (c) Montrer que dans la question précédente, on ne peut pas remplacer l'inclusion par une égalité.
3. Énoncer et démontrer des propriétés analogues pour l'opération $\check{\ }$.

Exercice 18.

Voici deux diagrammes de Venn.





1. Le premier diagramme semble indiquer qu'étant donné trois ensembles A, B et C, on a l'égalité $(A \setminus B) \cup (A \setminus C) = A \setminus (A \cap B \cap C)$. Démontrer cette égalité.
2. Le second diagramme semble indiquer qu'étant donné quatre ensembles A, B, C et D, on a l'égalité $(A \cup B) \cap (C \cup D) = (A \cap D) \cup (B \cap C)$.
   (a) Convainquez-vous (par un argument de symétrie) qu'une telle égalité est surprenante.
   (b) Montrer, par un exemple, que l'égalité est fausse.
   (c) Pourquoi le diagramme de Venn nous a-t-il induits en erreur ?