Nombres complexes

Exercice 1.

Une possibilité pour attaquer l'exercice est d'utiliser l'équivalence

$$\forall \zeta \in \mathbb{C}, \zeta \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \overline{\zeta} = \zeta.$$

Exercice 2.

On pourra montrer que l'assertion est fausse par l'absurde.

Une fois définis deux nombres complexes a et b tels que $\forall z \in \mathbb{C}, \overline{z} = az + b$, on pourra essayer d'obtenir de plus en plus de contraintes sur a et b, jusqu'à parvenir à une contradiction.

Exercice 6.

On pourra interpréter $1 + a^2$ (et les autres...) comme un module au carré.

Exercice 7.

On peut en fait déterminer, en fonction de m, toutes les solutions réelles de (E_m).

Exercice 8.

Pour la première question, on pourra commencer par résoudre l'équation $x^2 - 6x + 25 = 0$.

Exercice 12.

Les deux questions sont en fait plus similaires qu'elles n'en ont l'air.

Exercice 18.

On pourra commencer par exprimer a et b en fonction de $a \pm b$.

Exercice 20.

Deux pistes possibles :

1. Démontrer et utiliser l'inégalité (importante) $\forall a, b \in \mathbb{R}, 2ab \leqslant a^2 + b^2$.
2. Exprimer le terme de gauche comme un produit scalaire et appliquer l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

Exercice 23.

On pourra développer $|a \pm b|^2$, comme dans le cours.

Exercice 24.

On pourra utiliser le canevas standard pour montrer une assertion de la forme P ou Q.

Comment exploiter une hypothèse comme $z \in \mathbb{U}$ et $|z + 1| < 1$?

Exercice 26.

On pourra commencer par traiter le cas $x = 0$.

Exercice 27.

On pourra utiliser l'égalité $\forall z \in \mathbb{C}, |z|^2 = \overline{z}\, z$, puis développer.

Exercice 28.

On pourra chercher à montrer que

$$|a - b|^2 < |1 - \overline{a}b|^2 .$$

Exercice 32.

Pour déterminer géométriquement la transformation $z \mapsto f(z)$ définie par une formule, une bonne idée est de commencer par trouver l'ensemble de ses *points fixes*

$$\mathrm{Fix}(f) = \{z \in \mathbb{C} \mid f(z) = z\} .$$

Exercice 38.

On pourra commencer par traiter le cas $a = 1$.

Exercice 39.

On veillera à être soigneux sur le signe des cosinus et sinus que l'on calcule.

Exercice 43.

Deux méthodes possibles :

- dans le produit des éléments de $\mathbb{U}_n$, on peut chercher des « simplifications », c'est-à-dire des groupes de termes dont le produit fait 1 ; un dessin peut aider !
- un calcul peu subtil, par exemple en utilisant le fait que

$$\mathbb{U}_n = \left\{ e^{i\frac{2\pi}{n}k} \,\middle|\, k \in [\![0, n-1]\!] \right\} .$$

Exercice 46.

On se souviendra que la somme des racines septièmes de l'unité est nulle.

Exercice 47.

On se ressouviendra que la somme des racines septièmes de l'unité est nulle.

Exercice 51.

Pour les deux dernières questions, on pourra par exemple procéder par analyse et synthèse.

Dans la phase d'analyse, une fois défini un nombre complexe z vérifiant la relation, on pourra chercher à réexprimer ladite relation en fonction de $w = e^z$.

Autocorrection

Autocorrection A.

(i) La forme algébrique est $-i$. Le module est 1.

(ii) La forme algébrique est i. Le module est 1.

(iii) La forme algébrique est $-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$. Le module est $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

(iv) La forme algébrique est $-\frac{11}{5}+\frac{19}{10}i$. Le module est $\frac{13}{10}\sqrt{5}$.

(v) La forme algébrique est i. Le module est 1.

(vi) La forme algébrique est $-\frac{8}{25}+\frac{6}{25}i$. Le module est $\frac{2}{5}$.

(vii) La forme algébrique est -3. Le module est 3.

(viii) La forme algébrique est $\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$. Le module est 1.

(ix) La forme algébrique est $-16+24i$. Le module est $8\sqrt{13}$.

Autocorrection B.

On résout ces équations en revenant à la forme algébrique.

(i) $z=-8+i$;

(ii) $z=\frac{3}{8}-\frac{i}{2}$;

(iii) il n'y a pas de solution.

Autocorrection C.

On applique la méthode vue en cours.

(i) $\pm\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$;

(ii) $\pm(2-i)$;

(iii) $\pm(3-i)$;

(iv) $\pm(5-i)$;

(v) $\pm\left(\sqrt{\frac{\sqrt{5}+1}{2}}+i\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}\right)$.

Autocorrection D.

(i) $z\in\{j,\bar{j}\}$;

(ii) $z\in\{1+3i,-1-i\}$;

(iii) $z\in\{1,-1+2i\}$

(iv) $z\in\left\{\frac{1}{2}-i,\frac{7}{2}+i\right\}$;

(v) $z\in\{\pm(3-2i),\pm(1-i)\}$;

(vi) $z\in\left\{\pm i,\pm\left(\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{m}}+i\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{m}}\right)\right\}$.

Autocorrection E.

(i) $(x,y)\in\{(1+i,1-i),(1-i,1+i)\}$;

(ii) $(x,y)\in\{(-1,3i+1),(3i+1,-1)\}$;

(iii) $(x,y)\in\{(5i,3-i),(3-i,5i)\}$;

(iv) $(x,y)\in\left\{\begin{array}{l}\left(\frac{\left(1+\sqrt{\sqrt{17}-4}\right)+i\left(1+\sqrt{\sqrt{17}+4}\right)}{2},\frac{\left(1-\sqrt{\sqrt{17}-4}\right)+i\left(1-\sqrt{\sqrt{17}+4}\right)}{2}\right),\\ \left(\frac{\left(1-\sqrt{\sqrt{17}-4}\right)+i\left(1-\sqrt{\sqrt{17}+4}\right)}{2},\frac{\left(1+\sqrt{\sqrt{17}-4}\right)+i\left(1+\sqrt{\sqrt{17}+4}\right)}{2}\right)\end{array}\right\}$.

Autocorrection F.

(i) $2\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$;

(ii) $i=e^{i\pi/2}$;

(iii) $1+j=-j^2=e^{i\pi/3}$;

(iv) $\begin{cases} 2\left(\cos\dfrac{3\theta}{2}\right)e^{i\,3\theta/2} & \text{si } \cos\dfrac{3\theta}{2} \geqslant 0 \\ 2\left|\cos\dfrac{3\theta}{2}\right| e^{i(\pi+3\theta/2)} & \text{sinon.} \end{cases}$

(v) $e^{\cos\theta}\, e^{i\,\sin\theta}$;

(vi) $\begin{cases} 2\left(\cos\dfrac{\theta}{2}\right)e^{i\,\theta/2} & \text{si } \cos\dfrac{\theta}{2} \geqslant 0 \\ 2\left|\cos\dfrac{\theta}{2}\right| e^{i(\pi+\theta/2)} & \text{sinon.} \end{cases}$

Pour (iv) et (vi), remarquons que l'on peut être plus explicite :

- on a $\cos\dfrac{3\theta}{2} \geqslant 0$ si et seulement si θ appartient à l'un des intervalles
$$I_k = \left[-\frac{\pi}{3} + k\,\frac{4\pi}{3}, \frac{\pi}{3} + k\,\frac{4\pi}{3}\right],$$
pour un certain $k \in \mathbb{Z}$.
- on a $\cos\dfrac{\theta}{2} \geqslant 0$ si et seulement si θ appartient à l'un des intervalles
$$J_k = \Big[-\pi + k\,4\pi\,;\pi + k\,4\pi\Big],$$
pour un certain $k \in \mathbb{Z}$.

Autocorrection G.

On a

$$\begin{aligned}
\frac{(1-i)^{10}(\sqrt{3}+i)^5}{(-1-i\sqrt{3})^{10}} &= \frac{\left(\sqrt{2}e^{-i\pi/4}\right)^{10}\left(2e^{i\pi/6}\right)^5}{\left(2e^{i4\pi/3}\right)^{10}} \\
&= \frac{2^5\times 2^5}{2^{10}}\exp\left(i\times\left(-\frac{10\pi}{4}+\frac{5\pi}{6}-\frac{40\pi}{3}\right)\right) \\
&= \exp\left(-i15\pi\right) \\
&= \exp\left(i\pi\right) \\
&= -1.
\end{aligned}$$

Autocorrection H.

On a $z = 2e^{i\pi/6}$, donc un argument de z est $\dfrac{\pi}{6}$. On en déduit que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \arg\left(z^n\right) \equiv n\frac{\pi}{6} \pmod{2\pi}.$$

Ainsi, on a les équivalences :

(i) $z^n \in \mathbb{R} \Leftrightarrow n\dfrac{\pi}{6} \equiv 0 \pmod{\pi} \overset{\maltese}{\Leftrightarrow} n \equiv 0 \pmod 6$.

(ii) $z^n \in \mathbb{R}_- \Leftrightarrow n\dfrac{\pi}{6} \equiv -\pi \pmod{2\pi} \overset{\maltese}{\Leftrightarrow} n \equiv -6 \pmod{12} \Leftrightarrow n \equiv 6 \pmod{12}$.

(iii) $z^n \in \mathbb{R}_+ \Leftrightarrow n\dfrac{\pi}{6} \equiv \dfrac{\pi}{2} \pmod{2\pi} \overset{\maltese}{\Leftrightarrow} n \equiv 3 \pmod{12}$.

Dans un souci de complétude, énonçons précisément le petit résultat qui nous a été utile pour les équivalences surmontées d'une croix de Malte.

Lemme. Soit $\alpha, T \in \mathbb{C}^*$ et $x, y \in \mathbb{C}$. On a alors l'équivalence

$$x \equiv y \pmod{T} \Leftrightarrow \alpha x \equiv \alpha y \pmod{\alpha T}.$$

Démonstration. Supposons $x \equiv y \pmod{T}$. On peut donc trouver un entier $k \in \mathbb{Z}$ tel que $y = x + kT$. En multipliant cette égalité par α, on obtient $\alpha y = \alpha x + k\alpha T$, donc $\alpha x \equiv \alpha y \pmod{\alpha T}$.

La réciproque se montre exactement de la même façon (en fait, la réciproque peut se voir comme une application du sens direct aux nombres $x' = \alpha x$, $y' = \alpha y$, $T' = \alpha T$ et $\alpha' = \alpha^{-1}$).

Autocorrection I.

(i) $\frac{1}{4}\cos(3x) + \frac{3}{4}\cos(x)$;

(ii) $-\frac{1}{4}\sin(3x) + \frac{3}{4}\sin(x)$;

(iii) $\frac{1}{8}\cos(4x) + \frac{1}{2}\cos(2x) + \frac{3}{8}$;

(iv) $\frac{1}{8}\cos(4x) - \frac{1}{2}\cos(2x) + \frac{3}{8}$;

(v) $\frac{1}{16}\cos(5x) + \frac{5}{16}\cos(3x) + \frac{5}{8}\cos x$;

(vi) $\frac{1}{16}\sin(5x) - \frac{5}{16}\sin(3x) + \frac{5}{8}\sin x$;

(vii) $\frac{1}{4}\sin(3x) + \frac{1}{4}\sin x$;

(viii) $-\frac{1}{16}\sin(5x) + \frac{1}{16}\sin(3x) + \frac{1}{8}\sin x$;

(ix) $-\frac{\sin(6x)}{32} + \frac{3}{32}\sin(2x)$;

(x) $-\frac{1}{64}\cos(7x) + \frac{5}{64}\cos(5x) - \frac{9}{64}\cos(3x) + \frac{5}{64}\cos x$;

(xi) $-\frac{\cos(7x)}{4} + \frac{\cos(3x)}{2} - \frac{\cos x}{4}$;

(xii) $\frac{1}{8}\sin(6x) + \frac{3}{8}\sin(4x) + \frac{3}{8}\sin 2x$.

Autocorrection J.

(i) $\cos^3 x - 3\cos x\,\sin^2 x$;

(ii) $3\cos^2 x\,\sin x - \sin^3 x$;

(iii) $\cos^4(x) - 6\cos^2(x)\,\sin^2(x) + \sin^4(x)$;

(iv) $4\cos^3(x)\,\sin x - 4\cos x\,\sin^3(x)$;

(v) $\cos^5(x) - 10\cos^3(x)\,\sin^2(x) + 5\cos x\,\sin^4 x$;

(vi) $5\cos^4 x\,\sin x - 10\cos^2 x\,\sin^3 x + \sin^5 x$.

Autocorrection K.

(i) On a $\frac{1+i}{\sqrt{3}-i} = \frac{\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}}{2e^{-i\frac{\pi}{6}}} = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\frac{5\pi}{12}}$, donc les solutions de $z^n = \frac{1+i}{\sqrt{3}-i}$ forment l'ensemble

$$\left\{2^{-1/16}e^{i\frac{5\pi}{96}}\omega \,\middle|\, \omega \in \mathbb{U}_8\right\}.$$

(ii) Les solutions de $z^n = i$ forment l'ensemble

$$\left\{e^{i\frac{\pi}{2n}}\omega \,\middle|\, \omega \in \mathbb{U}_n\right\}.$$

(iii) $-7+24i$ n'ayant pas de forme exponentielle simple, on va en trouver une racine quatrième en en extrayant une racine carrée, puis en prenant une racine carrée de cette racine carrée. Après calcul, on trouve

- que les racines carrées de $-7+24i$ sont $\pm(3+4i)$;
- que les racines carrées de (par exemple) $3+4i$ sont $\pm(2+i)$;

donc les solutions de $z^4 = -7+24i$ forment l'ensemble

$$\{(2+i)\omega \mid \omega \in \mathbb{U}_4\} = \left\{2+i, 2i-1, -2-i, 1-2i\right\}.$$

(iv) Une résolution standard montre que les solutions de l'équation $Z^2 - 3Z + 2 = 0$ sont 1 et 2.

Soit $z \in \mathbb{C}$. On a donc la chaîne d'équivalences

$$\begin{aligned} z^8 - 3z^4 + 2 &\Leftrightarrow z^4 = 1 \text{ ou } z^4 = 2 \\ &\Leftrightarrow z \in \mathbb{U}_4 \text{ ou } z \in \left\{ \sqrt[4]{2}\omega \,\middle|\, \omega \in \mathbb{U}_4 \right\}. \end{aligned}$$

Donc l'ensemble des solutions est

$$\mathbb{U}_4 \cup \left\{ \sqrt[4]{2}\omega \,\middle|\, \omega \in \mathbb{U}_4 \right\} = \left\{1, i, -1, -i, \sqrt[4]{2}, \sqrt[4]{2}i, -\sqrt[4]{2}, -\sqrt[4]{2}i\right\}.$$