Nombres complexes

Généralités

Autocorrection A.
Écrire chacun des nombres complexes suivants sous forme algébrique, et calculer son module.

(i) $\dfrac{1}{i}$; (ii) $\dfrac{1+i}{1-i}$; (iii) $\dfrac{1+2i}{1-3i}$; (iv) $\dfrac{(2+3i)^2}{4-2i}$; (v) $\dfrac{1+i\sqrt{3}}{\sqrt{3}-i}$; (vi) $\left(\dfrac{1+i}{2-i}\right)^2$; (vii) $\dfrac{2+5i}{1-i}+\dfrac{2-5i}{1+i}$; (viii) $\dfrac{2}{1-i\sqrt{3}}$; (ix) $\dfrac{(5-i)^6}{(3+2i)^5}$.

Autocorrection B.
Résoudre les équations suivantes dans $\mathbb{C}$.

(i) $3z-(3-i)\overline{z}=1-2i$; (ii) $2z+6\overline{z}=3+2i$; (iii) $(3+4i)z-5\overline{z}=2i$.

Exercice 1.
Trouver tous les nombres complexes z tels que $(z-2)(\overline{z}+i)\in\mathbb{R}$.

Exercice 2.
L'assertion $\exists(a,b)\in\mathbb{C}^2 : \forall z\in\mathbb{C}, \overline{z}=az+b$ est-elle vraie ou fausse ?

Exercice 3$^+$.
Soit $\alpha\in\mathbb{C}$. Donner une condition nécessaire et suffisante sur α pour que l'on ait l'équivalence

$$\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2, x+\alpha y=0 \Leftrightarrow x=y=0.$$

Exercice 4.
On note $\mathcal{S}=\left\{n^2+m^2 \,\middle|\, (n,m)\in\mathbb{Z}^2\right\}$.

1. Exhiber un entier naturel n'appartenant pas à $\mathcal{S}$.
2. En utilisant la formule $\forall z,z'\in\mathbb{C}, |zz'|^2=|z|^2\,|z'|^2$, montrer que $\mathcal{S}$ est stable par produit, c'est-à-dire que $\forall p,q\in\mathcal{S}, pq\in\mathcal{S}$.
3. On pose $\mathcal{S}'=\left\{n^2+m^2+o^2 \,\middle|\, (n,m,o)\in\mathbb{Z}^3\right\}$. Montrer que $15\notin\mathcal{S}'$ et en déduire que $\mathcal{S}'$ n'est pas stable par produit.

Exercice 5.
En utilisant $j=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$, montrer que $\left\{a^2-ab+b^2 \,\middle|\, (a,b)\in\mathbb{Z}^2\right\}$ est stable par produit.

Exercice 6.
Soit a, b et $c\in\mathbb{Z}$ tels que $ab+bc+ca=1$. Montrer que $(1+a^2)(1+b^2)(1+c^2)$ est un carré parfait.

Équations du second degré

Autocorrection C.

Déterminer les racines carrées des nombres suivants.

(i) i ; (ii) $3-4i$; (iii) $8-6i$; (iv) $24-10i$; (v) $1+2i$.

Autocorrection D.

Soit $m \in \mathbb{R}^*$. Résoudre, dans $\mathbb{C}$, les équations suivantes.

(i) $z^2+z+1=0$;

(ii) $z^2-2iz+2-4i=0$;

(iii) $z^2-2iz-1+2i=0$;

(iv) $4z^2-16z+11-12i=0$;

(v) $z^4-(5-14i)z^2-2(5i+12)=0$;

(vi) $mz^4+(m-i)z^2-i=0$.

Autocorrection E.

Trouver les couples $(x,y) \in \mathbb{C}^2$ satisfaisant les systèmes d'équations suivants.

(i) $\begin{cases} x+y=2 \\ xy=2, \end{cases}$

(ii) $\begin{cases} x+y=3i \\ xy=-1-3i, \end{cases}$

(iii) $\begin{cases} x+y=3+4i \\ xy=5+15i, \end{cases}$

(iv) $\begin{cases} x+y=1+i \\ xy=2. \end{cases}$

Exercice 7.

Déterminer les $m \in \mathbb{R}$ tels que l'équation

$$z^3+(3+i)z^2-3z-(m+i)=0 \qquad (E_m)$$

ait au moins une solution réelle.

Exercice 8.

Résoudre les équations suivantes, d'inconnue $z \in \mathbb{C}$.

(i) $z^4-6z^2+25=0$; (ii) $z^4-(3+2i)z^2+8-6i=0$.

Relations coefficients-racines (pour les polynômes du second degré)

Exercice 9.

Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. Trouver $p, q \in \mathbb{R}$ tels que $z^2+pz+q=0$.

Exercice 10$^+$.

Soit p et q deux nombres complexes, avec $q \neq 0$. On suppose que les deux racines de X^2-pX+q^2 ont le même module.

Exprimer le quotient $\dfrac{p^2}{q^2}$ en fonction des deux racines, et en déduire que $\dfrac{p}{q} \in \mathbb{R}$.

Exponentielle complexe

Autocorrection F.

Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Mettre les nombres complexes suivants sous forme exponentielle.

(i) $2-2i$;

(ii) $\dfrac{-1+i\sqrt{3}}{\sqrt{3}+i}$;

(iii) $1+j$;

(iv) $e^{i\theta}+e^{2i\theta}$;

(v) $e^{e^{i\theta}}$;

(vi) $1+\cos\theta+i\sin\theta$.

Autocorrection G.

Calculer $\dfrac{(1-i)^{10}(\sqrt{3}+i)^5}{(-1-i\sqrt{3})^{10}}$.

Autocorrection H.

Soit $z=\sqrt{3}+i$. Déterminer les entiers $n \in \mathbb{N}$ tels que z^n soit dans $\mathbb{R}$ (resp. $\mathbb{R}_-$, resp. $i\mathbb{R}_+$.)

Exercice 11.

Calculer les expressions suivantes (on pourra présenter les résultats sous forme exponentielle).

(i) $\left(\dfrac{1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^{666}$;

(ii) $(1+i)^{18}$;

(iii) $\left(\dfrac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^{20}$;

(iv) $\dfrac{(1+i)^4}{(1-i)^3}+\dfrac{(1-i)^4}{(1+i)^3}$;

(v) $(1+j)^n$ (pour $n \in \mathbb{N}$);

(vi) $(1+i\sqrt{3})^n+(1-i\sqrt{3})^n$.

Exercice 12.

Montrer

$$(2+i\sqrt{5})^7+(2-i\sqrt{5})^7 \in \mathbb{R} \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N}, \left(\frac{19+7i}{9-i}\right)^n+\left(\frac{20+5i}{7+6i}\right)^n \in \mathbb{R}.$$

Exercice 13$^+$.

1. Montrer $\forall n \in \mathbb{N}, \left(\dfrac{11+7i}{3+5i}\right)^n+\left(\dfrac{5-5i}{1-3i}\right)^n \in \mathbb{R}$.
2. Soit z et $\zeta \in \mathbb{C}$. Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}, z^n+\zeta^n \in \mathbb{R}) \Leftrightarrow (z, \zeta \in \mathbb{R}$ ou $z=\overline{\zeta})$.

Exercice 14.

Soit $\theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R}$ et $z_1=e^{i\theta_1}$, $z_2=e^{i\theta_2}$.

Calculer $\dfrac{z_1+z_2}{1+z_1z_2}$, après avoir déterminé à quelle condition ce quotient avait un sens.

Exercice 15.

1. Montrer que si $z \in \mathbb{U}\setminus\{1\}$, alors $i\dfrac{1+z}{1-z} \in \mathbb{R}$.
2. Soit $z \in \mathbb{U}\setminus\{-1\}$. Montrer qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $z=\dfrac{1+ia}{1-ia}$.

Exercice 16$^+$.

Montrer l'égalité $\left\{z \in \mathbb{C}^* \,\middle|\, z+\dfrac{1}{z} \in \mathbb{R}\right\}=\mathbb{U}\cup\mathbb{R}^*$.

(In)égalités sur les modules

Exercice 17.

Soit $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$.

1. Montrer $\left|\text{Ré}\left(\overline{z_1}\, z_2\right)\right| \leqslant |z_1|\,|z_2|$ et comparer à l'inégalité de Cauchy-Schwarz vue en cours.
2. À quelle condition cette inégalité est-elle une égalité ?

Exercice 18.

Soit $a, b \in \mathbb{C}$. Montrer que $|a| + |b| \leqslant |a + b| + |a - b|$ et préciser les cas d'égalité.

Exercice 19.

Montrer que pour tous $a, b, c \in \mathbb{C}$, on a $|1 + a| + |a + b| + |b + c| + |c| \geqslant 1$.

Exercice 20.

Soit $z \in \mathbb{C}$. Montrer $\dfrac{|\text{Ré}\, z| + |\text{Im}\, z|}{\sqrt{2}} \leqslant |z| \leqslant |\text{Ré}\, z| + |\text{Im}\, z|$.

Exercice 21.

Montrer que $\forall z \in \mathbb{C}, |e^z| \leqslant e^{|z|}$ et déterminer les cas d'égalité.

Exercice 22$^+$.

Déterminer l'ensemble des complexes s'écrivant comme somme de trois complexes de module 1.

Exercice 23.

Soit a et b deux nombres complexes de module $\leqslant 1$. Montrer que $|a + b| \leqslant \sqrt{2}$ ou $|a - b| \leqslant \sqrt{2}$.

Exercice 24.

Soit $z \in \mathbb{U}$. Montrer que $|1 + z| \geqslant 1$ ou $|1 + z^2| \geqslant 1$.

Exercice 25$^+$.

Soit $z \in \mathbb{C}$. Montrer que $|z^2 - 1| \leqslant 8 \Rightarrow |z - 2| \leqslant 5$.

Exercice 26.

Soit $x, y, z \in \mathbb{R}$. Montrer que $e^{ix} + e^{iy} + e^{iz} = 0 \Rightarrow e^{i2x} + e^{i2y} + e^{i2z} = 0$.

Exercice 27.

Soit $a, b, c \in \mathbb{U}$. Montrer que $|a + b + c| = |ab + bc + ca|$.

Exercice 28.

Soit $a, b \in \mathbb{C}$ tels que $|a|, |b| < 1$. Montrer que $\left|\dfrac{a - b}{1 - \overline{a}b}\right| < 1$.

Exercice 29$^+$.

Soit $a, b \in \mathbb{C}$. On a $|a + b|^2 \leqslant \left(1 + |a|^2\right)\left(1 + |b|^2\right)$.

Exercice 30^{++}.

Soit $z \in \mathbb{U} \setminus \{1\}$. Montrer qu'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $|z^n - 1| \geqslant \sqrt{3}$.

Géométrie plane

Exercice 31 (Identité du parallélogramme).

Soit $z, z' \in \mathbb{C}$. Montrer que $|z+z'|^2 + |z-z'|^2 = 2\left(|z|^2 + |z'|^2\right)$ et en donner une interprétation géométrique.

Exercice 32.

1. Écrire sous forme complexe :
   - la rotation de centre $2 - i$ et de rapport $\dfrac{\pi}{4}$;
   - l'homothétie de centre $3 + 2i$ et de rapport -2 ;
   - la composée $r \circ s$, où r est la rotation de centre 1 et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$ et s la symétrie centrale de centre $i + 3$. Déterminer plus directement cette transformation.
2. Déterminer les type et éléments caractéristiques (centre, angle, rapport, etc.) des transformations suivantes :
   - $z \mapsto e^{i\frac{\pi}{3}} z + 1$;
   - $z \mapsto z + 4 - 2i$;
   - $z \mapsto 3z + i$.

Exercice 33.

Déterminer les ensembles suivants.

(i) $\{z \in \mathbb{C} \mid z + \bar{z} = |z|\}$;

(ii) $\{z \in \mathbb{C} \mid |1+z| \leqslant 1 \text{ et } |1-z| \leqslant 1\}$;

(iii) $\left\{ z \in \mathbb{C}^* \;\middle|\; \text{les vecteurs d'affixe } z \text{ et } \dfrac{1}{z} \text{ soient orthogonaux} \right\}$;

(iv) $\{z \in \mathbb{C} \mid 0 \text{ est le centre du cercle circonscrit du triangle de sommets } 1, z \text{ et } z+i\}$.

Exercice 34.

Montrer que si un carré du plan possède deux sommets adjacents à coordonnées entières, alors tous ses sommets le sont.

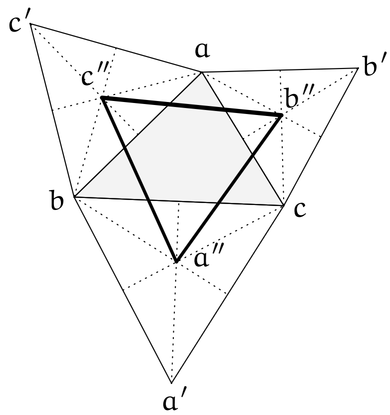
Exercice 35.

Montrer que quatre complexes distincts de $\mathbb{Z}[j] = \{a + bj \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$ ne peuvent pas former un carré.

Exercice 36.

Déterminer les $z \in \mathbb{C}^*$ tels que z et ses trois racines cubiques forment un parallélogramme.

Exercice 37$^+$ (Théorème « de Napoléon »).



1. Soit $a, b, c \in \mathbb{C}$ deux à deux distincts.
   (a) Montrer que le triangle (a, b, c) est équilatéral direct si et seulement s'il existe $(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}$ tel que a, b et c soient les images de 1, j et j^2, respectivement, par $z \mapsto \lambda z + \mu$.
   (b) En déduire que (a, b, c) est équilatéral direct si et seulement si $a + jb + j^2c = 0$.
2. Dans la figure ci-contre, les trois petits triangles extérieurs sont équilatéraux. Montrer que (a'', b'', c'') est équilatéral.

Exercice 38$^+$.

Soit $a, b, c \in \mathbb{U}$ tels que $a + b + c = 0$. Montrer que le triangle de sommets a, b et c est équilatéral.

Trigonométrie

Autocorrection I.

Soit $x \in \mathbb{R}$. Linéariser (c'est-à-dire exprimer comme des sommes de $\cos(px)$ et $\sin(qx)$, avec p et q des entiers) les expressions suivantes.

(i) $\cos^3(x)$;
(ii) $\sin^3(x)$;
(iii) $\cos^4(x)$;
(iv) $\sin^4(x)$;
(v) $\cos^5(x)$;
(vi) $\sin^5(x)$;
(vii) $\sin(x)\cos^2(x)$;
(viii) $\sin^3(x)\cos^2(x)$;
(ix) $\sin^3(x)\cos^3(x)$;
(x) $\sin^6(x)\cos(x)$;
(xi) $\sin^2(2x)\cos(3x)$;
(xii) $\cos^3(x)\sin(3x)$.

Autocorrection J.

Soit $x \in \mathbb{R}$. Écrire les expressions suivantes comme des sommes de $\cos^p(x)\sin^q(x)$, pour des entiers p et q.

(i) $\cos(3x)$;
(ii) $\sin(3x)$;
(iii) $\cos(4x)$;
(iv) $\sin(4x)$;
(v) $\cos(5x)$;
(vi) $\sin(5x)$.

Exercice 39.

Calculer $\cos\frac{\pi}{8}$ et $\sin\frac{\pi}{8}$ de deux manières :

- en calculant les racines carrées de $e^{i\pi/4}$ sous forme algébrique ;
- en utilisant la formule donnant $\cos(2x)$ en fonction de $\cos(x)$.

Exercice 40.

Calculer $\cos\frac{\pi}{12}$ et $\sin\frac{\pi}{12}$, de deux manières :

- à l'aide de la relation $\frac{\pi}{12} = \frac{1}{2} \times \frac{\pi}{6}$;
- à l'aide de la relation $\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}$.

Exercice 41.

Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, 2\cos\frac{\pi}{2^n} = \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{\cdots + \sqrt{2}}}}$, où la formule comporte $n - 1$ radicaux.

Cyclotomie

Exercice 42.

Calculer les produits $(a + bj + cj^2)(a + bj^2 + cj)$ et $(a + b + c)(a + bj + cj^2)(a + bj^2 + cj)$, pour trois nombres complexes a, b et c.

Exercice 43.

Soit $n \geqslant 1$ un entier. Déterminer le produit des éléments de $\mathbb{U}_n$.

Exercice 44$^+$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On définit $Q = \left\{ \omega^2 \,\middle|\, \omega \in \mathbb{U}_n \right\}$.

1. Montrer que $Q \subseteq \mathbb{U}_n$.
2. Montrer que $Q = \mathbb{U}_n$ si et seulement si n est impair.

Exercice 45.

1. Démontrer que $1 + 2\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) + 2\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) = 0$.
2. En déduire une équation du second degré vérifiée par $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$, puis une formule pour $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$.
3. Déterminer $\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right)$, puis les valeurs de cos et sin en $\frac{\pi}{10}$ et $\frac{\pi}{5}$.

Exercice 46.

En utilisant les éléments de $\mathbb{U}_7$, exhiber une équation de degré 3 dont $\cos\left(\frac{2\pi}{7}\right)$ soit solution.

Exercice 47.

Soit $\zeta_7 = \exp\left(i\frac{2\pi}{7}\right)$, $A = \zeta_7 + \zeta_7^2 + \zeta_7^4$ et $B = \zeta_7^3 + \zeta_7^5 + \zeta_7^6$.

Calculer $A + B$ et AB, puis en déduire A et B.

Exercice 48.

On note $A = 2\cos\left(\frac{2\pi}{13}\right) + 2\cos\left(\frac{6\pi}{13}\right) + 2\cos\left(\frac{8\pi}{13}\right)$ et $B = 2\cos\left(\frac{4\pi}{13}\right) + 2\cos\left(\frac{10\pi}{13}\right) + 2\cos\left(\frac{12\pi}{13}\right)$.

1. Exprimer A et B à l'aide de puissances de $\zeta = \exp\left(i\frac{2\pi}{13}\right)$.
2. (a) Calculer $A + B$ et AB.
   (b) En déduire les valeurs de A et B.
3. En déduire $\zeta + \zeta^3 + \zeta^9 = \dfrac{\sqrt{13} - 1 + i\sqrt{26 - 6\sqrt{13}}}{4}$.

Exercice 49$^+$.

Soit $\omega \in \mathbb{U}_7 \setminus \{1\}$.

1. Montrer que $\dfrac{\omega}{1+\omega^2} + \dfrac{\omega^2}{1+\omega^4} + \dfrac{\omega^3}{1+\omega^6} = -2$.
2. En déduire la valeur de $\dfrac{1}{\cos\frac{2\pi}{7}} + \dfrac{1}{\cos\frac{4\pi}{7}} + \dfrac{1}{\cos\frac{6\pi}{7}}$.

Équations diverses

Autocorrection K.

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes ($n > 1$ est un entier).

(i) $z^8 = \dfrac{1+i}{\sqrt{3} - i}$;

(ii) $z^n = i$;

(iii) $z^4 = -7 + 24i$;

(iv) $z^8 - 3z^4 + 2 = 0$.

Exercice 50.
Résoudre l'équation $1+\overline{z}=|z|$.

Exercice 51.
Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes.

(i) $e^z=0$;
(ii) $e^z=i$;
(iii) $e^z=1+i$;
(iv) $e^z+e^{-z}=1$;
(v) $e^z+2e^{-z}=i$.

Exercice 52.

1. Déterminer l'ensemble des $z\in\mathbb{C}$ tels que $\left|\dfrac{z+i}{z-i}\right|=1$.

   (On commencera par déterminer pour quelles valeurs de $z\in\mathbb{C}$ l'expression a un sens).
2. Même question avec l'ensemble des $z\in\mathbb{C}$ tels que $\left|\dfrac{z-3}{z-5}\right|=1$.

Exercice 53.
Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $\text{Ré}(z^3)=\text{Im}(z^3)$.

Exercice 54.
Trouver tous les $z\in\mathbb{C}^*$ tels que z, $\dfrac{1}{z}$ et $1-z$ aient même module.

Exercice 55.
Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Résoudre $z^n=\overline{z}$.

Exercice 56.
Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes ($\theta\in\mathbb{R}$ est un paramètre, $n>1$ un entier).

(i) $\overline{z}^7=\dfrac{1}{z^2}$;
(ii) $z^2-2e^{i\theta}z+2i\sin(\theta)e^{i\theta}=0$;
(iii) $z^{2n}-2\cos(n\theta)\,z^n+1=0$;
(iv) $z^5=16\sqrt{2}+16i\sqrt{2}$;
(v) $z^7-4z^5-z^2+4=0$;
(vi) $z^8+2z^7-2z-4=0$.

Exercice 57.
Résoudre l'équation $z^3=2+11i$, en sachant qu'elle possède une solution dans $\{a+ib\mid a,b\in\mathbb{Z}\}$.

Exercice 58.
Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $(z+i)^n-(z-i)^n=0$.

Exercice 59$^+$.
Soit $n\in\mathbb{N}^*$ et $A\in\mathbb{C}$. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur n et A pour que les solutions de $\left(\dfrac{1+iz}{1-iz}\right)^n=A$ soient réelles.