

Applications

Exercice 1. ✓

Soit Ω un ensemble et $A, B \subseteq \Omega$. Montrer que les fonctions suivantes sont les fonctions indicatrices de parties de Ω que l'on précisera.

- | | | |
|---|---|---|
| (i) $\min(\mathbb{1}_A, \mathbb{1}_B)$; | (iii) $\mathbb{1}_A \cdot \mathbb{1}_B$; | (v) $\mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B - \mathbb{1}_A \cdot \mathbb{1}_B$; |
| (ii) $\max(\mathbb{1}_A, \mathbb{1}_B)$; | (iv) $1 - \mathbb{1}_A$; | (vi) $(\mathbb{1}_A - \mathbb{1}_B)^2$. |

Exercice 2.

Soit E_1, E_2, F trois ensembles et $f_1 : E_1 \rightarrow F, f_2 : E_2 \rightarrow F$ deux applications.

Donner une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe une application $g : E_1 \cup E_2 \rightarrow F$ telle que $g|_{E_1} = f_1$ et $g|_{E_2} = f_2$.

Injectivité, surjectivité, bijectivité

Autocorrection A. ✓

Soit E, F et G trois ensembles et $f : E \rightarrow F, g : F \rightarrow G$ deux applications.

1. Montrer que si $g \circ f$ est surjective et que g est injective, alors f est surjective.
2. Montrer que si $g \circ f$ est injective et que f est surjective, alors g est injective.

Exemples

Autocorrection B. ✓

1. L'application $f : \begin{cases} \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \\ n \mapsto 2n \end{cases}$ est-elle injective? surjective?
2. Mêmes questions pour l'application $g : \begin{cases} \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \\ n \mapsto \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{si } n \text{ est pair} \\ n & \text{si } n \text{ est impair.} \end{cases} \end{cases}$
3. Déterminer $g \circ f$ et $f \circ g$. Sont-elles injectives? surjectives?

Autocorrection C. ✓

Soit $f : \begin{cases} \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \\ x \mapsto x^2. \end{cases}$

1. L'application f est-elle injective? surjective?
2. Existe-t-il $g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ telle que $f \circ g = \text{id}_{\mathbb{N}}$? Existe-t-il $h : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ telle que $h \circ f = \text{id}_{\mathbb{N}}$?

Exercice 3. ✓

Déterminer si les applications suivantes sont injectives (resp. surjectives, bijectives).

- | | | |
|--|--|--|
| (i) $\begin{cases} \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \\ n \mapsto n+1 \end{cases}$ | (v) $\begin{cases} \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y) \mapsto (y, 0, y-x) \end{cases}$ | (ix) $\begin{cases} \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2 \\ (x, y) \mapsto (x+y, xy) \end{cases}$ |
| (ii) $\begin{cases} \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z} \\ n \mapsto n+1 \end{cases}$ | (vi) $\begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ z \mapsto z^2 + z + 1 \end{cases}$ | (x) $\begin{cases} \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z} \\ n \mapsto n + (-1)^n \end{cases}$ |
| (iii) $\begin{cases} \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) \mapsto (y, x) \end{cases}$ | (vii) $\begin{cases} \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \\ z \mapsto z^2 + z + 1 \end{cases}$ | (xi) $\begin{cases} \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \rightarrow \mathbb{R} \\ f \mapsto f(0) \end{cases}$ |
| (iv) $\begin{cases} \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) \mapsto 3y \end{cases}$ | (viii) $\begin{cases} \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) \mapsto (x+y, xy) \end{cases}$ | (xii) $\begin{cases} \mathcal{P}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{R}_+) \\ X \mapsto X \cap \mathbb{R}_+ \end{cases}$ |

Exercice 4. ✓

Soit $f : \begin{cases} \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \\ n \mapsto n+1 \end{cases}$ et $g : \begin{cases} \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \\ n \mapsto \max(0, n-1) \end{cases}$.

1. Montrer que $g \circ f = \text{id}_{\mathbb{N}}$.
2. Peut-on en déduire que l'application g est la réciproque de f ?

Exercice 5. ✓

Soit $f : \begin{cases} \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z} \\ n \mapsto \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{si } n \text{ est pair} \\ -\frac{n+1}{2} & \text{sinon.} \end{cases} \end{cases}$

Montrer que f est bijective et donner la bijection réciproque.

Exercice 6. ✓

On note $\pi : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}$ la fonction qui associe à tout entier n le nombre de nombres premiers appartenant à l'intervalle entier $\llbracket 1, n \rrbracket$.

La fonction π est-elle injective ? surjective ? bijective ?

Exercice 7⁺. 💡

Déterminer si la fonction $\sin : \mathbb{Q} \rightarrow [-1, 1]$ est injective et/ou surjective.

Exercice 8⁺. ✓

Montrer que $\chi : \begin{cases} \mathbb{N} \rightarrow (\mathbb{N}^{\mathbb{N}})^{(\mathbb{N}^{\mathbb{N}})} \\ n \mapsto (f \mapsto \underbrace{f \circ f \circ \dots \circ f}_{n \text{ fois}}) \end{cases}$ est injective.

Exercice 9. ✓

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on se donne une application $f_x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. On définit alors

$$\varphi : \begin{cases} \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) \mapsto (x, f_x(y)) \end{cases}.$$

1. Montrer que φ est injective si et seulement si, pour tout $x \in \mathbb{R}$, l'application f_x est injective.
2. Montrer que φ est surjective si et seulement si, pour tout $x \in \mathbb{R}$, l'application f_x est surjective.
3. **Application.** L'application $\begin{cases} \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) \mapsto (x, y^3 + xy) \end{cases}$ est-elle injective ? surjective ?

Exercice 10⁺.

Soit E et F deux ensembles non vides et G un ensemble ayant au moins deux éléments. Soit $f : E \rightarrow F$. On considère l'application

$$\varphi : \begin{cases} G^F \rightarrow G^E \\ g \mapsto g \circ f. \end{cases}$$

1. Montrer que φ est injective si et seulement si f est surjective.
2. Montrer que φ est surjective si et seulement si f est injective.

Exercice 11⁺.

Soit Ω un ensemble et $X, Y \subseteq \Omega$. On considère l'application

$$\psi : \begin{cases} \mathcal{P}(\Omega) \rightarrow \mathcal{P}(X) \times \mathcal{P}(Y) \\ A \mapsto (X \cap A, Y \cap A). \end{cases}$$

Donner des conditions nécessaires et suffisantes sur X et Y pour que ψ soit injective (resp. surjective).

Quand ψ est bijective, exhiber sa réciproque.

Exercice 12⁺⁺.

1. Soit $\varphi : \begin{cases} \mathcal{P}(\mathbb{N}) \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{N}) \\ A \mapsto \{n \in \mathbb{N} \mid 2n \in A\}. \end{cases}$
 - (a) Cette application est-elle injective? surjective?
 - (b) Trouver une partie $A \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$ *non triviale* (c'est-à-dire ni $\mathbb{N}$, ni $\emptyset$) telle que $\varphi(A) = A$.
2. Soit $\varphi : \begin{cases} \mathcal{P}(\mathbb{N}) \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{N})^2 \\ A \mapsto (\{n \in \mathbb{N} \mid 2n \in A\}, \{n \in \mathbb{N} \mid 2n+1 \in A\}). \end{cases}$
 - (a) Cette application est-elle injective? surjective?
 - (b) Existe-t-il une partie propre $A \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$ telle que $\psi(A) = (A, A)$?

Exercice 13⁺⁺.

1. Soit $f, g : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ deux bijections. Montrer que $\begin{cases} \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z} \\ k \mapsto f(k)g(k) \end{cases}$ n'est pas bijective.
2. Peut-elle être injective?

Exercice 14⁺⁺⁺ (Règle de Golomb).

Montrer qu'il existe une partie $G \subseteq \mathbb{N}$ telle que $\delta : \begin{cases} \{(a, b) \in G^2 \mid a < b\} \rightarrow \mathbb{N}^* \\ (a, b) \mapsto b - a \end{cases}$ soit bijective.

Théorie**Exercice 15.**

Soit E et F deux ensembles, et $A \subseteq E$. Soit $f : E \rightarrow F$. Dire si les assertions suivantes sont vraies ou fausses (on justifiera par une preuve ou un contre-exemple).

- | | |
|--|--|
| (i) Si f est injective, alors $f _A$ est injective. | (iii) Si $f _A$ est injective, alors f est injective. |
| (ii) Si f est surjective, alors $f _A$ est surjective. | (iv) Si $f _A$ est surjective, alors f est surjective. |

Exercice 16. _____ ✓

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Montrer que si f est strictement monotone, alors f est injective.

La réciproque est-elle vraie ?

Exercice 17. _____ ? ✓

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ bijective.

1. Montrer que f est impaire si et seulement si f^{-1} l'est.
2. A-t-on le même résultat pour la parité ?

Exercice 18. _____ ✓

Soit E, F, G, H quatre ensembles et $f : E \rightarrow F$, $g : F \rightarrow G$ et $h : G \rightarrow H$ trois applications.

Montrer que si $g \circ f$ et $h \circ g$ sont bijectives, alors f , g et h sont bijectives.

Exercice 19⁺. _____

Soit E un ensemble, $n > 1$ un entier et $f : E \rightarrow E$ telle que $f^{\circ n} = \underbrace{f \circ f \circ \dots \circ f}_{n \text{ fois}}$ soit égale à f .

1. Montrer que f est injective si et seulement si elle est surjective.
2. On fixe $n = 2$. À quelle condition f est-elle injective ?

Exercice 20⁺. _____

Soit $f, g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ deux applications telles que f soit injective, g soit surjective et $\forall n \in \mathbb{N}, f(n) \leq g(n)$.

Montrer que $f = g$.

Images directe et réciproque

Autocorrection D. _____ ✓

1. Déterminer $\sin[A]$, dans les cas $A = \mathbb{R}, \mathbb{R}_+, [0, 2\pi], [-\pi, \pi], [0, \pi/2], [-\pi, \pi/2]$.
2. Déterminer $\sin^{-1}[B]$ dans les cas $B = [-1, 1], [0, 1], [3, 4], \mathbb{R}, \{1\}, \{-1, 1\}$.

Exercice 21. _____

Soit $f : \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto 2x^2 - 4x + 1. \end{cases}$

1. La fonction f est-elle injective ? surjective ?
2. Montrer que f est injective sur $[1, +\infty[$. En déduire que f induit une bijection de $[1, +\infty[$ sur son image (que l'on précisera) et déterminer son application réciproque.
3. Déterminer $f \left[[0, 1] \right], f \left[\mathbb{R}_- \right], f \left[\mathbb{R}_+ \right], f \left[[-2, 2] \right], f^{-1} \left[\{1\} \right], f^{-1} \left[\{-1\} \right], f^{-1} \left[[0, 1] \right], f^{-1} \left[[-2, 1] \right]$.

Exercice 22. _____

Soit $f : \begin{cases} \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C} \\ z \mapsto z + \frac{1}{z}. \end{cases}$

1. L'application f est-elle injective ? surjective ?
2. Déterminer $f \left[\mathbb{R}^* \right]$ et $f \left[\mathbb{U} \right]$.

Exercice 23.

On considère

$$f : \begin{cases} \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \\ z \mapsto z^2. \end{cases}$$

1. La fonction f est-elle injective? surjective? bijective?
2. On note $\Omega = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Ré} z > 0\}$.

Montrer que la restriction de f à Ω est injective.

3. Décrire l'image de $f|_{\Omega}$.

Exercice 24.

Soit $f : \begin{cases} \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \\ n \mapsto n + 1. \end{cases}$ Déterminer les parties $A \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$ stables sous f .

Exercice 25.

Soit X un ensemble. Déterminer les applications $f : X \rightarrow X$ stabilisant toutes les parties de X .

Exercice 26.

Soit $f : E \rightarrow F$ une application. Montrer $\forall A \in \mathcal{P}(E), \forall B \in \mathcal{P}(F), f[A \cap f^{-1}[B]] = f[A] \cap B$.

Exercice 27.

Soit E et F deux ensembles et $f : E \rightarrow F$.

1. Montrer que f est injective si et seulement si $\forall (A, B) \in \mathcal{P}(E)^2, f[A \cap B] = f[A] \cap f[B]$.
2. Montrer que f est bijective si et seulement si $\forall A \in \mathcal{P}(E), f[E \setminus A] = F \setminus f[A]$.

Exercice 28⁺.

Soit E et F deux ensembles et $f : E \rightarrow F$.

1. Soit $A \subseteq E$. Montrer que $A \subseteq f^{-1}[f[A]]$ et donner un exemple prouvant qu'il n'y a pas toujours égalité.
2. Montrer que f est injective si et seulement si $\forall A \in \mathcal{P}(E), f^{-1}[f[A]] = A$.
3. Soit $B \subseteq F$. Montrer que $f[f^{-1}[B]] \subseteq B$ et donner un exemple prouvant qu'il n'y a pas toujours égalité.
4. Montrer que f est surjective si et seulement si $\forall B \in \mathcal{P}(F), f[f^{-1}[B]] = B$.

Exercice 29⁺.

Soit E et F deux ensembles et $f : E \rightarrow F$. On considère les applications

$$\varphi : \begin{cases} \mathcal{P}(E) \rightarrow \mathcal{P}(F) \\ X \mapsto f[X] \end{cases} \quad \text{et} \quad \psi : \begin{cases} \mathcal{P}(F) \rightarrow \mathcal{P}(E) \\ Y \mapsto f^{-1}[Y]. \end{cases}$$

1. Montrer les équivalences f injective $\Leftrightarrow \varphi$ injective $\Leftrightarrow \psi$ surjective.
2. Montrer les équivalences f surjective $\Leftrightarrow \varphi$ surjective $\Leftrightarrow \psi$ injective.

Familles d'ensembles

Autocorrection E. ✓

1. Montrer $\bigcup_{x \in [0,1]}]x-1, x+1[=]-1, 2[.$

2. Que vaut $\bigcap_{x \in [0,1]}]x-1, x+1[?$

Autocorrection F. ✓

Soit E et F deux ensembles et $f : E \rightarrow F$. Soit I un ensemble non vide.

1. Soit $(B_i)_{i \in I}$ une famille de parties de F .

(a) Montrer $f^{-1} \left[\bigcup_{i \in I} B_i \right] = \bigcup_{i \in I} f^{-1}[B_i].$

(b) Montrer $f^{-1} \left[\bigcap_{i \in I} B_i \right] = \bigcap_{i \in I} f^{-1}[B_i].$

2. Soit $(A_i)_{i \in I}$ une famille de parties de E .

(a) Montrer $f \left[\bigcup_{i \in I} A_i \right] = \bigcup_{i \in I} f[A_i].$

(b) Montrer $f \left[\bigcap_{i \in I} A_i \right] \subseteq \bigcap_{i \in I} f[A_i].$

Autocorrection G. ✓

Soit Ω un ensemble, et $(A_i)_{i \in I}$ une famille de parties de Ω . Soit enfin $B \in \mathcal{P}(\Omega)$. Montrer

$$\left(\bigcup_{i \in I} A_i \right) \cap B = \bigcup_{i \in I} (A_i \cap B) \quad \text{et} \quad \left(\bigcap_{i \in I} A_i \right) \cup B = \bigcap_{i \in I} (A_i \cup B).$$

Exercice 30. ✓

Soit $f : E \rightarrow F$ une application entre deux ensembles. On suppose qu'il existe une suite $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de parties de E telle que

(i) $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n = E;$

(ii) $\forall n \in \mathbb{N}, A_n \subseteq A_{n+1};$

et que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la restriction $f|_{A_n}$ est injective.

1. Montrer que f est injective.

2. Montrer que les deux hypothèses (i) et (ii) sont nécessaires.

Exercice 31 (Tout ensemble est une union de singletons). ✓

Soit E un ensemble. Montrer que $E = \bigcup_{x \in E} \{x\}.$

Exercice 32. ✓

Soit $f : E \rightarrow F$ une application. On définit $K(f) = \left\{ (x_1, x_2) \in E^2 \mid f(x_1) = f(x_2) \right\}.$

1. Déterminer $K(f)$ pour les exemples $f_1 : \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto x^2 \end{array} \right., f_2 : \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto e^x \end{array} \right.$ et $f_3 : \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \\ z \mapsto e^z \end{array} \right.$

2. Montrer $K(f) = \bigcup_{y \in F} f^{-1}[\{y\}]^2.$

Exercice 33.

Soit Ω un ensemble et $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ telle que, pour tout recouvrement disjoint $(A_1, A_2, A_3) \in \mathcal{P}(\Omega)^3$, il existe un unique indice $i \in \{1, 2, 3\}$ tel que $A_i \in \mathcal{U}$.

Montrer :

1. $\emptyset \notin \mathcal{U}$ et $\Omega \in \mathcal{U}$;
2. $\forall A \in \mathcal{P}(\Omega), A \in \mathcal{U}$ ou $\Omega \setminus A \in \mathcal{U}$;
3. $\forall A \in \mathcal{U}, \forall B \in \mathcal{P}(\Omega), A \cap B = \emptyset \Rightarrow B \notin \mathcal{U}$;
4. $\forall A \in \mathcal{U}, \forall B \in \mathcal{P}(\Omega), A \subseteq B \Rightarrow B \in \mathcal{U}$;
5. $\forall A, B \in \mathcal{U}, A \cap B \in \mathcal{U}$.

Exercice 34.

Soit X un ensemble et $f : X \rightarrow X$ une application. Soit $(A_i)_{i \in I}$ une famille de parties de X .

1. Montrer que si, pour tout $i \in I$, A_i est stable sous f , il en va de même de $\bigcap_{i=1}^n A_i$ et $\bigcup_{i=1}^n A_i$.
2. Est-il vrai en général que si $A \subseteq X$ est stable sous f , alors $X \setminus A$ l'est également?

Exercice 35⁺.

Soit $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une famille de parties de $\mathbb{R}$. On définit leurs *limites inférieure et supérieure*

$$\liminf_{n \in \mathbb{N}} E_n = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \bigcap_{k \geq n} E_k \quad \text{et} \quad \limsup_{n \in \mathbb{N}} E_n = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \bigcup_{k \geq n} E_k.$$

1. Montrer que $\liminf_{n \in \mathbb{N}} E_n \subseteq \limsup_{n \in \mathbb{N}} E_n$.
2. Calculer $\liminf_{n \in \mathbb{N}} E_n$ et $\limsup_{n \in \mathbb{N}} E_n$ dans les cas suivants :
 - $(E_n)_{n \in \mathbb{N}} = ([n, +\infty])_{n \in \mathbb{N}}$;
 - $(E_n)_{n \in \mathbb{N}} = \left(\left[(-1)^n n, +\infty \right] \right)_{n \in \mathbb{N}}$.
3. Montrer que $\liminf_{n \in \mathbb{N}} E_n = \limsup_{n \in \mathbb{N}} E_n$ si et seulement si, pour tout $x \in \mathbb{R}$, la suite $(\mathbb{1}_{E_n}(x))_{n \in \mathbb{N}}$ stationne (c'est-à-dire est constante à partir d'un certain rang).

Exercice 36⁺⁺.

Soit Ω un ensemble et $(A_i)_{i=1}^n$ et $(B_i)_{i=1}^n$ deux familles de parties de Ω . Montrer

$$\bigcup_{i=1}^n (A_i \cap B_i) = \bigcap_{I \in \mathcal{P}([1, n])} \left[\bigcup_{i \in I} A_i \cup \bigcup_{j \notin I} B_j \right].$$