Inégalités

Exercice 1.
On a déjà fait cette démonstration, dans un autre contexte...

Exercice 2.
Appliquer habilement l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

Exercice 3.
On pourra habilement appliquer l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

Exercice 4.
Pour la deuxième question, on pourra utiliser l'inégalité $\forall k \geqslant 2, \frac{1}{k^2} \leqslant \frac{1}{k(k-1)}$ pour majorer $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$.

Exercice 6.
La continuité ne sert qu'à garantir le fait que l'intégrale soit bien définie.

On pourra utiliser la « croissance de l'intégrale » : si $\varphi, \psi : [0,1] \to \mathbb{R}$ sont deux fonctions continues telles que $\forall x \in [0,1], \varphi(x) \leqslant \psi(x)$, alors $\int_0^1 \varphi(x)\,dx \leqslant \int_0^1 \psi(x)\,dx$.

Exercice 8.
On pourra chercher à diviser de part et d'autre par le membre de droite de l'inégalité, pour montrer une majoration par 1.

Exercice 9.
Pour la deuxième question, on pourra commencer par démontrer $\forall m \in \mathbb{N}, P(2^m)$.

Exercice 11.
On pourra développer le membre de droite et le réécrire sous la forme $\frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} a_i\, b_{i+k}$, où, dans l'expression b_{i+k}, les indices sont à comprendre *modulo* n, c'est-à-dire que par exemple $b_{n+1} = b_1$.

Exercice 13.
Étant donné une fonction f convexe générale, que peut-on dire de la fonction $x \mapsto f(-x)$?

Exercice 15.
On pourra se rappeler (voire redémontrer) qu'une fonction $g : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ est convexe si et seulement si

$$\forall a < b < c \in \mathbb{R}_+^*, (c-a)g(b) \leqslant (c-b)g(a) + (b-a)g(c).$$

Exercice 19.
On pourra commencer par remarquer que le résultat est facile sur $[0,1[$.

Exercice 25.

Pour la deuxième question, on pourra chercher à minorer H_{3n+1} en fonction de H_n.

Exercice 27.

On pourra traduire l'objectif sous la forme $\forall t \in \mathbb{R}, |t| \leqslant \cdots$ et reconnaître une inégalité de convexité (plus ou moins).

Exercice 34.

Pour mettre le problème en équations, on pourra calculer l'aire du n-gone en le découpant en triangles dont un sommet est au centre du cercle.

Exercice 37.

On pourra, après justification se ramener au cas où $x \leqslant y \leqslant \dfrac{x+z}{2} \leqslant z$.

Exercice 38.

2. Dans le sens difficile, remarquer que la fonction $\dfrac{f^\alpha - 1}{\alpha}$ est convexe.
3. Dans le sens difficile, obtenir une inégalité de la forme $f\big((1-\lambda)a + \lambda b\big) \leqslant (1-\lambda)u_\beta + \lambda v_\beta$, puis régler β de telle sorte que $u_\beta = v_\beta$ (c'est une manière usuelle, dans ce genre de cas, de transformer une expression additive en une expression multiplicative).

Exercice 39.

Procéder par l'absurde. Voyez-vous pourquoi on peut se ramener au cas d'une fonction strictement positive, strictement croissante, et strictement convexe ou strictement concave ?

Autocorrection

Autocorrection A.

(i) On a $1 = \sum_{k=1}^{n} p_k \times 1 \overset{\text{CS}}{\leqslant} \sqrt{\sum_{k=1}^{n} p_k^2}\underbrace{\sqrt{\sum_{k=1}^{n} 1^2}}_{=\sqrt{n}}$, donc $\sum_{k=1}^{n} p_k^2 \geqslant \dfrac{1}{n}$.

(ii) On a $n = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{p_k} \times \dfrac{1}{\sqrt{p_k}} \overset{\text{CS}}{\leqslant} \underbrace{\sqrt{\sum_{k=1}^{n} p_k}}_{=1}\sqrt{\sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{p_k}}$, donc $\sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{p_k} \geqslant n^2$.

(iii) On a $n^2 \leqslant \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{p_k} \times 1 \overset{\text{CS}}{\leqslant} \sqrt{\sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{p_k^2}}\underbrace{\sqrt{\sum_{k=1}^{n} 1}}_{=\sqrt{n}}$, donc $n^4 \leqslant n\sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{p_k^2}$, c'est-à-dire $\sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{p_k^2} \geqslant n^3$.

Autocorrection B.

En appliquant l'inégalité arithmético-géométrique (avec des poids tous égaux) à $\dfrac{1}{x_1}, \dots, \dfrac{1}{x_n} \in \mathbb{R}_+^*$,

$$\frac{1/x_1 + \cdots + 1/x_n}{n} \geqslant \left(\frac{1}{x_1} \cdots \frac{1}{x_n}\right)^{\frac{1}{n}}.$$

Par décroissance de la fonction inverse sur $\mathbb{R}_+^*$,

$$\frac{n}{\frac{1}{x_1} + \cdots + \frac{1}{x_n}} \leqslant (x_1 \cdots x_n)^{1/n}.$$

Autocorrection C.

- Commençons par montrer que J est un intervalle. Soit $u, v \in J$ et $\lambda \in [0, 1]$. On a

$$a\left[(1-\lambda)u + \lambda v\right] + b = (1-\lambda)\underbrace{(au+b)}_{\in I} + \lambda\underbrace{(av+b)}_{\in I} \in I,$$

  donc $(1-\lambda)u + \lambda v \in J$ ce qui conclut.
- Soit maintenant, $u, v \in J$ et $\lambda \in [0, 1]$. On a

$$\begin{aligned} g\big((1-\lambda)u + \lambda v\big) &= f\big((1-\lambda)(au+b) + \lambda(av+b)\big) \\ &\leqslant (1-\lambda)f(au+b) + \lambda f(av+b) \\ &\leqslant (1-\lambda)g(u) + \lambda g(v), \end{aligned}$$

  ce qui conclut.

Autocorrection D.

1. Soit $a, b \in I$ et $\lambda \in [0, 1]$. On a

$$\begin{aligned} & f\big((1-\lambda)a + \lambda b\big) \leqslant (1-\lambda)f(a) + \lambda f(b) && \text{(f convexe)} \\ \text{donc} \quad & g\Big(f\big((1-\lambda)a + \lambda b\big)\Big) \leqslant g\big((1-\lambda)f(a) + \lambda f(b)\big) && \text{(g croissante)} \\ & \qquad \leqslant (1-\lambda)g\big(f(a)\big) + \lambda g\big(f(b)\big), && \text{(g convexe)} \end{aligned}$$

   ce qui montre que $g \circ f$ est convexe.
2. Avec les mêmes notations, on montre de même que :
   - si f est convexe et g est concave et décroissante, alors $g \circ f$ est concave ;
   - si f est concave et g est concave et croissante, alors $g \circ f$ est concave ;
   - si f est concave et f est convexe et décroissante, alors $g \circ f$ est convexe.
3. Considérons $f = \exp$ et $g : x \mapsto -x$ (affine donc convexe). La composée $g \circ f = -\exp$ n'est pas convexe (sa dérivée seconde est strictement négative).

Autocorrection E.

Soit $x_1 \leqslant x_2 \in \mathbb{R}_+$. Comme $a - x_2 \leqslant a - x_1 \leqslant a + x_2$, on peut trouver $\lambda \in [0, 1]$ tel que

$$a - x_1 = (1-\lambda)(a - x_2) + \lambda(a + x_2).$$

On en déduit l'expression pour $a + x_1$, en utilisant le fait que a est à la fois le milieu des segments $[a - x_1, a + x_1]$ et $[a - x_2, a + x_2]$:

$$\begin{aligned} \frac{(a-x_1) + (a+x_1)}{2} &= \frac{(a-x_1) + (a+x_1)}{2} \\ \text{donc} \qquad a + x_1 &= (a - x_2) + (a + x_2) - (a - x_1) \\ &= \lambda(a - x_2) + (1-\lambda)(a + x_2). \end{aligned}$$

On a alors

$$\begin{aligned}
g(x_1) &= f(a-x_1)+f(a+x_1) \\
&= f\big((1-\lambda)(a-x_2)+\lambda(a+x_2)\big)+f\big(\lambda(a-x_2)+(1-\lambda)(a+x_2)\big) \\
&\leqslant (1-\lambda)f(a-x_2)+\lambda f(a+x_2)+\lambda f(a-x_2)+(1-\lambda)f(a+x_2) \\
&\leqslant f(a-x_2)+f(a+x_2) \\
&\leqslant g(x_2).
\end{aligned}$$

Autocorrection F.

1. Soit $f : \begin{cases} \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x^n. \end{cases}$ Cette fonction est lisse, et $f'' : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } n = 1 \\ n(n-1)\,x^{n-2} & \text{si } n \geqslant 2 \end{cases}$ est positive.

   La fonction f est donc convexe.

   On en déduit

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^n = f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leqslant \frac{f(a)+f(b)}{2} = \frac{a^n+b^n}{2}.$$

2. Soit $k \in [\![1, n]\!]$. On a

$$\begin{aligned}
\frac{a^k+b^k}{2}\left(\frac{a+b}{2}\right)^{n-k} - \frac{a^{k-1}+b^{k-1}}{2}\left(\frac{a+b}{2}\right)^{n-k+1} &= \left(\frac{a+b}{2}\right)^{n-k}\left[\frac{a^k+b^k}{2} - \frac{a^{k-1}+b^{k-1}}{2}\frac{a+b}{2}\right] \\
&= \frac{1}{4}\left(\frac{a+b}{2}\right)^{n-k}\left[2a^k+2b^k-\big(a^{k-1}+b^{k-1}\big)(a+b)\right] \\
&= \frac{1}{4}\left(\frac{a+b}{2}\right)^{n-k}\big(a^k+b^k-a^{k-1}b-ab^{k-1}\big) \\
&= \frac{(a-b)\big(a^{k-1}-b^{k-1}\big)}{4}\left(\frac{a+b}{2}\right)^{n-k}.
\end{aligned}$$

3. En sommant ces factorisations, on a le télescopage

$$\begin{aligned}
\frac{a^n+b^n}{2} - \left(\frac{a+b}{2}\right)^n &= \sum_{k=1}^{n}\left[\frac{a^k+b^k}{2}\left(\frac{a+b}{2}\right)^{n-k} - \frac{a^{k-1}+b^{k-1}}{2}\left(\frac{a+b}{2}\right)^{n-k+1}\right] \\
&= \frac{a-b}{4}\sum_{k=1}^{n}\big(a^{k-1}-b^{k-1}\big)\left(\frac{a+b}{2}\right)^{n-k}.
\end{aligned}$$

   - Si $a = b$, cette expression ou une réflexion directe montre que la différence vaut 0 et que l'inégalité de la première question est une égalité.
   - De même, si $n = 1$, l'inégalité est une égalité (c'est évident sur sa formulation originale et assez amusant à repérer dans le calcul précédent).
   - Réciproquement, supposons $n \geqslant 2$ et $a \neq b$ et montrons que l'inégalité est stricte. Quitte à échanger a et b, on peut supposer $a > b$.

     Tous les termes de la somme étant $\geqslant 0$, on peut minorer la somme par son dernier et obtenir

$$\frac{a^n+b^n}{2} - \left(\frac{a+b}{2}\right)^n \geqslant \underbrace{\frac{a-b}{4}}_{>0}\underbrace{\big(a^{n-1}-b^n\big)}_{>0}\underbrace{\left(\frac{a+b}{2}\right)^0}_{=1} > 0,$$

     car la fonction $x \mapsto x^{n-1}$ est strictement croissante, puisque l'on a supposé $n \geqslant 2$.