

Inégalités

Inégalités sur les sommes

Inégalité de Cauchy-Schwarz

Autocorrection A. _____

Soit $p_1, \dots, p_n > 0$ tels que $p_1 + \dots + p_n = 1$. En appliquant à chaque fois l'inégalité de Cauchy-Schwarz à des n -uplets bien choisis, montrer successivement :

$$(i) \sum_{k=1}^n p_k^2 \geq \frac{1}{n}; \quad (ii) \sum_{k=1}^n \frac{1}{p_k} \geq n^2; \quad (iii) \sum_{k=1}^n \frac{1}{p_k^2} \geq n^3.$$

Exercice 1. _____

Soit $(x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$. Montrer l'inégalité triangulaire

$$\sqrt{\sum_{k=1}^n (x_k + y_k)^2} \leq \sqrt{\sum_{k=1}^n x_k^2} + \sqrt{\sum_{k=1}^n y_k^2}$$

en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

Exercice 2 (Inégalité de Sedrakyan). _____

1. Soit $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n \in \mathbb{R}_+^*$. Montrer

$$\frac{a_1^2}{b_1} + \frac{a_2^2}{b_2} + \dots + \frac{a_n^2}{b_n} \geq \frac{(a_1 + a_2 + \dots + a_n)^2}{b_1 + b_2 + \dots + b_n}.$$

2. **Application.** Soit $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}_+^*$. On note $S = \sum_{j=1}^n x_j$ et, pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $S_k = \sum_{\substack{j \in \llbracket 1, n \rrbracket \\ j \neq k}} x_j$.

$$\text{Montrer } \sum_{k=1}^n \frac{S}{S_k} \geq \frac{n^2}{n-1}.$$

Exercice 3⁺. _____

Soit $\lambda_1, \dots, \lambda_n \geq 0$ tels que $\sum_{k=1}^n \lambda_k = 1$. On définit $g : x \mapsto \sum_{k=1}^n \lambda_k \cos(kx)$.

Montrer $\forall x \in \mathbb{R}, g(x)^2 \leq \frac{1 + g(2x)}{2}$.

Exercice 4⁺. _____

Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle.

1. Soit $x \in [0, 1[$, Montrer $\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^n a_k x^k \leq \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \sqrt{\sum_{k=0}^n a_k^2}$.

2. Montrer $\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=1}^n \frac{a_k}{k} \leq \sqrt{2} \sqrt{\sum_{k=1}^n a_k^2}$.

Exercice 5⁺⁺ (Inégalité discrète de Loomis-Whitney).

1. Soit a, b, c trois familles de réels positifs indexées par $\llbracket 1, n \rrbracket^2$. Montrer

$$\sum_{(i,j,k) \in \llbracket 1, n \rrbracket^3} a_{i,j}^{1/2} b_{j,k}^{1/2} c_{k,i}^{1/2} \leq \left(\sum_{(i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2} a_{i,j} \right)^{1/2} \left(\sum_{(j,k) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2} b_{j,k} \right)^{1/2} \left(\sum_{(k,i) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2} c_{k,i} \right)^{1/2}.$$

2. Dans cette question, on note entre barres verticales le cardinal (c'est-à-dire le nombre d'éléments) d'un ensemble fini. Soit $E \subseteq \mathbb{Z}^3$ un ensemble fini.

On note $E_x = \{(y, z) \mid (x, y, z) \in E\}$ la projection de E obtenue en « oubliant » la coordonnée x et, de même, $E_y = \{(x, z) \mid (x, y, z) \in E\}$ et $E_z = \{(x, y) \mid (x, y, z) \in E\}$. Montrer l'inégalité

$$|E| \leq \sqrt{|E_x| |E_y| |E_z|}.$$

Inégalité arithmético-géométrique**Autocorrection B.**

Soit $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}_+^*$. Montrer $\frac{n}{\frac{1}{x_1} + \dots + \frac{1}{x_n}} \leq (x_1 \cdots x_n)^{1/n}$.

Exercice 6.

Soit $H \in \mathbb{R}_+$ et $f, g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}_+$ deux fonctions continues telles que $\forall x \in [0, 1], f(x)g(x) \geq H$.

Montrer que $\int_0^1 f(x) dx \geq \sqrt{H}$ ou $\int_0^1 g(x) dx \geq \sqrt{H}$.

Exercice 7⁺.

1. En utilisant notamment l'inégalité arithmético-géométrique, trouver quatre nombres réels positifs $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ tels que

$$x^2 y z t \leq \alpha x^4 y + \beta y^4 z + \gamma z^4 t + \delta t^4 x.$$

2. En déduire

$$\forall x, y, z, t \in \mathbb{R}_+^*, x y z t = 1 \Rightarrow x + y + z + t \leq x^2 y + y^2 z + z^2 t + t^2 x.$$

Exercice 8⁺.

Soit $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}_+$ tels que $\alpha_1 + \dots + \alpha_n = 1$. Montrer

$$\forall (x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^n, \prod_{i=1}^n x_i^{\alpha_i} + \prod_{i=1}^n y_i^{\alpha_i} \leq \prod_{i=1}^n (x_i + y_i)^{\alpha_i}.$$

Exercice 9⁺ (Inégalité arithmético-géométrique : la démonstration de Cauchy).

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $P(n)$ l'assertion

$$\forall (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}_+^n, \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n} \leq \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}.$$

1. (a) Montrer $\forall n \in \mathbb{N}^*, P(n) \Rightarrow P(2n)$.
- (b) Montrer $\forall n \in \mathbb{N}^*, P(n+1) \Rightarrow P(n)$.
2. En déduire $\forall n \in \mathbb{N}^*, P(n)$.

Réarrangement

Exercice 10.

Soit $i : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}^*$ une injection. Montrer $\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=1}^n \frac{i(k)}{k} \geq n$.

Exercice 11⁺ (Inégalité de corrélation de Čebyšëv, par réarrangement).

Soit $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n, b_1 \leq b_2 \leq \dots \leq b_n$ deux familles croissantes indexées par $\llbracket 1, n \rrbracket$. Montrer

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_k b_k \geq \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i \right) \left(\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n b_j \right).$$

Convexité

Généralités

Autocorrection C.

Soit I un intervalle et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe et $a, b \in \mathbb{R}$. On pose $J = \{x \in \mathbb{R} \mid ax + b \in I\}$.

Montrer que J est un intervalle et que $g : \begin{cases} J \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto f(ax + b) \end{cases}$ est une fonction convexe.

Autocorrection D.

1. Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ convexe et $g : J \rightarrow \mathbb{R}$ convexe et croissante. Montrer que $g \circ f$ est convexe.
2. Énoncer et démontrer un autre résultat de composition analogue à celui-ci, mais mettant en jeu au moins une fonction concave.
3. Donner un contre-exemple si g n'est plus supposée croissante.

Exercice 12.

1. Montrer que les fonctions convexes et concaves sont exactement les fonctions affines.
2. Soit $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$ convexes telles que $f + g$ est affine. Montrer que f et g sont affines.

Exercice 13.

Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ convexes et impaires.

Exercice 14.

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ convexe.

1. Montrer que pour tout $a \in I$, la fonction $p_a : \begin{cases} I \setminus \{a\} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \end{cases}$ est croissante.
2. Soit $a_1 < b_1$ et $a_2 < b_2$ quatre éléments de I .

Montrer que si $a_1 \leq a_2$ et $b_1 \leq b_2$, alors $\frac{f(b_1) - f(a_1)}{b_1 - a_1} \leq \frac{f(b_2) - f(a_2)}{b_2 - a_2}$.

Exercice 15⁺.

Soit $f : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$. Montrer que la fonction $x \mapsto x f(x)$ est convexe si et seulement si $x \mapsto f\left(\frac{1}{x}\right)$ l'est.

Exercice 16.

Soit $f \in D^1(I)$ dont le graphe est au-dessus de toutes ses tangentes. Montrer que f est convexe.

Exercice 17.

Soit $a \in I$ et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ convexe et dérivable en a . Montrer que $\forall x \in I, f(x) \geq f'(a)(x - a) + f(a)$.

Exercice 18.

Une fonction $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ est dite *strictement convexe* si, pour tous $a < b \in I$, on a

$$\forall \lambda \in]0, 1[, f((1 - \lambda)a + \lambda b) < (1 - \lambda)f(a) + \lambda f(b).$$

1. Soit $f \in D^1(I)$, de dérivée strictement croissante. Montrer que f est strictement convexe.
2. Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ strictement convexe. Soit $\lambda_1, \dots, \lambda_n > 0$ tels que $\lambda_1 + \dots + \lambda_n = 1$ et $a_1, \dots, a_n \in I$.

Montrer que si $f\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i a_i\right) = \sum_{i=1}^n \lambda_i f(a_i)$, alors $a_1 = \dots = a_n$.

3. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\left(\frac{n+1}{2}\right)^n \geq n!$, et préciser les cas d'égalité.

Exercice 19.

Montrer que la fonction arcsin est convexe sur $[0, 1]$.

Exercice 20.

À quelle condition une fonction polynomiale de degré impair est-elle convexe sur $\mathbb{R}$?

Propriétés globales des fonctions convexes

Autocorrection E.

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ convexe et $a \in \mathbb{R}$. Montrer que $g : \begin{cases} \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto f(a - x) + f(a + x) \end{cases}$ est croissante.

Exercice 21.

Soit $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ concave. Montrer $\forall x, y \in \mathbb{R}_+, f(x + y) \leq f(x) + f(y)$.

Exercice 22.

1. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ convexe et majorée. Montrer que f est constante.
2. Le résultat subsiste-t-il sur $\mathbb{R}_+$?

Exercice 23.

Soit I un intervalle ouvert et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ convexe.

1. On suppose f dérivable. Montrer que si f admet un extremum local en $a \in I$, alors elle admet en ce point un minimum global.
2. On ne suppose plus f dérivable.
 - (a) On suppose que f admet un minimum local en $a \in I$. Montrer qu'elle admet en ce point un minimum global.
 - (b)⁺ Peut-elle admettre en un point un maximum local?
3. Que dire de l'ensemble des points en lesquels f admet un minimum?

Exercice 24⁺.

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe telle que $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$.

Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \geq 0$.

Applications

Autocorrection F.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $a, b \in \mathbb{R}_+$.

1. Montrer $\left(\frac{a+b}{2}\right)^n \leq \frac{a^n + b^n}{2}$.
2. (a) Pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, factoriser la différence

$$\frac{a^k + b^k}{2} \left(\frac{a+b}{2}\right)^{n-k} - \frac{a^{k-1} + b^{k-1}}{2} \left(\frac{a+b}{2}\right)^{n-k+1}.$$

- (b) En déduire une condition nécessaire et suffisante sur a et b et n pour que l'inégalité de la première question soit une égalité.

Exercice 25 (Démonstration de Pietro Mengoli, 1650).

1. Montrer que $\forall x > 1, \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} \geq \frac{3}{x}$.
2. En déduire que la suite $(H_n)_{n \in \mathbb{N}^*} = \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ n'est pas majorée.

Exercice 26.

Montrer $\forall x_1, x_2 > 1, \ln\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \geq \sqrt{\ln(x_1) \ln(x_2)}$:

- en utilisant deux fois l'inégalité arithmético-géométrique ;
- *via* la fonction $\ln \circ \ln$.

Exercice 27.

Montrer $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, |\ln(x)| \leq \frac{1}{2} \left|x - \frac{1}{x}\right|$.

Exercice 28⁺.

Soit $r_1, \dots, r_n \geq 1$. Montrer que

$$\frac{n}{1 + \sqrt[n]{r_1 \cdots r_n}} \leq \frac{1}{1+r_1} + \cdots + \frac{1}{1+r_n}.$$

Exercice 29.

Soit $x, y, z > 0$ telle que $x + y + z = 1$. Montrer que $\left(1 + \frac{1}{x}\right) \left(1 + \frac{1}{y}\right) \left(1 + \frac{1}{z}\right) \geq 64$.

Exercice 30.

1. Démontrer $\forall k \in \mathbb{N}^*, \sqrt{k+1} - \sqrt{k} \leq \frac{1}{2\sqrt{k}}$.
2. En déduire l'existence de deux constantes A et B telles que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, 2\sqrt{n} + A \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} \leq 2\sqrt{n} + B.$$

Exercice 31.

Soit $p \in]0, 1[$. On considère la fonction $f_p : \begin{cases} \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \begin{cases} x^p & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases} \end{cases}$

- (a) Montrer que $t \mapsto t^p$ est concave (sur $\mathbb{R}_+^*$).
(b) En déduire que f_p est concave (sur $\mathbb{R}_+$).
- (a) Montrer $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}_+, (x_1 + x_2)^p \leq x_1^p + x_2^p$.
(b) Montrer $\forall x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}_+, \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^p \leq \sum_{i=1}^n x_i^p$.

Exercice 32.

Soit $A \in \mathbb{R}_+$. Trouver λ et $\mu \in \mathbb{R}$ les plus petits possibles tels que

$$\forall x \in [-A, A], e^x \leq \lambda x + \mu.$$

Exercice 33.

Soit α, β, γ les angles (géométriques) d'un triangle. Montrer

$$\frac{1}{1 + \sin \alpha} + \frac{1}{1 + \sin \beta} + \frac{1}{1 + \sin \gamma} \geq \frac{6}{2 + \sqrt{3}}.$$

Exercice 34.

Soit $n \geq 4$. Montrer que de tous les polygones à n côtés inscrits dans un cercle, le polygone régulier est celui qui a l'aire maximale.

Exercice 35⁺ (Inégalités de Young, de Hölder et de Minkowski).

Dans tout l'exercice, on fixe $p, q \in [1, +\infty[$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

- Montrer l'inégalité de Young : $\forall a, b \in \mathbb{R}_+, a^{1/p} b^{1/q} \leq \frac{1}{p} a + \frac{1}{q} b$.
- Pour tout $\ell \geq 1$ et tout $x \in \mathbb{R}^n$, on note $\|x\|_\ell = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^\ell \right)^{1/\ell}$.
(a) Soit $x, y \in \mathbb{R}^n$ tels que $\|x\|_p = \|y\|_q = 1$.

En utilisant l'inégalité de Young, montrer $\sum_{i=1}^n x_i y_i \leq 1$.

(b) En déduire l'inégalité de Hölder : $\forall x, y \in \mathbb{R}^n, \sum_{i=1}^n x_i y_i \leq \|x\|_p \|y\|_q$.

(c) Peut-on étendre cette inégalité dans le cas $p = 1$?

3. Soit $x, y \in \mathbb{R}^n$.

(a) Montrer $\|x + y\|_p^p \leq \sum_{i=1}^n |x_i| |x_i + y_i|^{p-1} + \sum_{i=1}^n |y_i| |x_i + y_i|^{p-1}$.

(b) En appliquant habilement l'inégalité de Hölder, montrer l'inégalité de Minkowski :

$$\|x + y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p.$$

Exercice 36⁺.

1. Soit $\varphi : [0, 1]^2 \rightarrow \mathbb{R}$ telle que

- pour tout $a \in [0, 1]$, la fonction $y \mapsto \varphi(a, y)$ est convexe;
- pour tout $b \in [0, 1]$, la fonction $x \mapsto \varphi(x, b)$ est convexe.

Montrer qu'alors $\forall (x, y) \in [0, 1]^2$, $\varphi(x, y) \leq \max(\varphi(0, 0), \varphi(0, 1), \varphi(1, 0), \varphi(1, 1))$.

2. Montrer $\forall x, y, z \in [0, 1]$, $\frac{x^2}{1+y+z} + \frac{y^2}{1+x+z} + \frac{z^2}{1+x+y} \leq 1$.

Exercice 37⁺⁺ (Inégalité de Popoviciu).

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ convexe et $x, y, z \in I$. Montrer

$$\frac{2}{3} \left[f\left(\frac{x+y}{2}\right) + f\left(\frac{y+z}{2}\right) + f\left(\frac{z+x}{2}\right) \right] \leq \frac{1}{3} [f(x) + f(y) + f(z)] + f\left(\frac{x+y+z}{3}\right).$$

Mélange**Exercice 38⁺**.

Une fonction $f : I \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ est dite *log-convexe* (ou *logarithmiquement convexe*) si $\ln \circ f$ est convexe.

1. Montrer qu'une fonction log-convexe est convexe. La réciproque est-elle vraie?
2. Montrer que f est log-convexe si et seulement si, pour tout $\alpha > 0$, la fonction f^α est convexe.
3. Montrer que f est log-convexe si et seulement si, pour tout $\beta \in \mathbb{R}$, $x \mapsto e^{\beta x} f(x)$ est convexe.
4. Montrer que la somme et le produit de deux fonctions log-convexes est log-convexe.

Exercice 39⁺⁺.

Soit $f \in C^3(\mathbb{R})$. Montrer $\exists a \in \mathbb{R} : f(a) f'(a) f''(a) f'''(a) \geq 0$.