Inégalités

Inégalités sur les sommes

Inégalité de Cauchy-Schwarz

Autocorrection A.

Soit $p_1, \dots, p_n > 0$ tels que $p_1 + \cdots + p_n = 1$. En appliquant à chaque fois l'inégalité de Cauchy-Schwarz à des n-uplets bien choisis, montrer successivement :

(i) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} p_k^2 \geqslant \frac{1}{n}$; (ii) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{p_k} \geqslant n^2$; (iii) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{p_k^2} \geqslant n^3$.

Exercice 1.

Soit $(x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$. Montrer l'*inégalité triangulaire*

$$\sqrt{\sum_{k=1}^{n} (x_k + y_k)^2} \leqslant \sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k^2} + \sqrt{\sum_{k=1}^{n} y_k^2}$$

en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

Exercice 2 (Inégalité de Sedrakyan).

1. Soit $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n \in \mathbb{R}_+^*$. Montrer
$$\frac{a_1^2}{b_1} + \frac{a_2^2}{b_2} + \cdots + \frac{a_n^2}{b_n} \geqslant \frac{(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)^2}{b_1 + b_2 + \cdots + b_n}.$$
2. **Application.** Soit $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}_+^*$. On note $S = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} x_j$ et, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $S_k = \displaystyle\sum_{\substack{j \in [\![1,n]\!] \\ j \neq k}} x_j$.
Montrer $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{S}{S_k} \geqslant \frac{n^2}{n-1}$.

Exercice 3$^+$.

Soit $\lambda_1, \dots, \lambda_n \geqslant 0$ tels que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \lambda_k = 1$. On définit $g : x \mapsto \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \lambda_k \cos(kx)$.

Montrer $\forall x \in \mathbb{R}, g(x)^2 \leqslant \dfrac{1 + g(2x)}{2}$.

Exercice 4$^+$.

Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle.

1. Soit $x \in [0, 1[$, Montrer $\forall n \in \mathbb{N}, \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k x^k \leqslant \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \sqrt{\sum_{k=0}^{n} a_k^2}$.
2. Montrer $\forall n \in \mathbb{N}, \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{k} \leqslant \sqrt{2} \sqrt{\sum_{k=1}^{n} a_k^2}$.

Exercice 5^{++}.

1. Soit a, b, c trois familles de réels positifs indexées par $[\![1, n]\!]^2$. Montrer

$$\sum_{(i,j,k)\in[\![1,n]\!]^3} a_{i,j}^{1/2}\, b_{j,k}^{1/2}\, c_{k,i}^{1/2} \leqslant \left(\sum_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2} a_{i,j}\right)^{1/2} \left(\sum_{(j,k)\in[\![1,n]\!]^2} b_{j,k}\right)^{1/2} \left(\sum_{(k,i)\in[\![1,n]\!]^2} c_{k,i}\right)^{1/2}.$$

2. Dans cette question, on note entre barres verticales le cardinal (c'est-à-dire le nombre d'éléments) d'un ensemble fini. Soit $E \subseteq \mathbb{Z}^3$ un ensemble fini.

   On note $E_x = \{(y, z) \mid (x, y, z) \in E\}$ la projection de E obtenue en « oubliant » la coordonnée x et, de même, $E_y = \{(x, z) \mid (x, y, z) \in E\}$ et $E_z = \{(x, y) \mid (x, y, z) \in E\}$. Montrer l'inégalité

$$|E| \leqslant \sqrt{|E_x|\ |E_y|\ |E_z|}.$$

Inégalité arithmético-géométrique

Autocorrection B.
Soit $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}_+^*$. Montrer $\dfrac{n}{\frac{1}{x_1} + \cdots + \frac{1}{x_n}} \leqslant (x_1 \cdots x_n)^{1/n}$.

Exercice 6.
Soit $H \in \mathbb{R}_+$ et $f, g : [0, 1] \to \mathbb{R}_+$ deux fonctions continues telles que $\forall x \in [0, 1], f(x)\, g(x) \geqslant H$.

Montrer que $\displaystyle\int_0^1 f(x)\, dx \geqslant \sqrt{H}$ ou $\displaystyle\int_0^1 g(x)\, dx \geqslant \sqrt{H}$.

Exercice 7^{+}.

1. En utilisant notamment l'inégalité arithmético-géométrique, trouver quatre nombres réels positifs $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ tels que

$$x^2yzt \leqslant \alpha\, x^4y + \beta\, y^4z + \gamma\, z^4t + \delta\, t^4x.$$

2. En déduire

$$\forall x, y, z, t \in \mathbb{R}_+^*, xyzt = 1 \Rightarrow x + y + z + t \leqslant x^2y + y^2z + z^2t + t^2x.$$

Exercice 8^{+}.
Soit $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}_+$ tels que $\alpha_1 + \cdots + \alpha_n = 1$. Montrer

$$\forall (x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^n, \prod_{i=1}^n x_i^{\alpha} + \prod_{i=1}^n y_i^{\alpha} \leqslant \prod_{i=1}^n (x_i + y_i)^{\alpha}.$$

Exercice 9^{+} (Inégalité arithmético-géométrique : la démonstration de Cauchy).
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $P(n)$ l'assertion

$$\forall (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}_+^n, \sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n} \leqslant \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}.$$

1. (a) Montrer $\forall n \in \mathbb{N}^*, P(n) \Rightarrow P(2n)$.
   (b) Montrer $\forall n \in \mathbb{N}^*, P(n+1) \Rightarrow P(n)$.
2. En déduire $\forall n \in \mathbb{N}^*, P(n)$.

Mélange

Autocorrection C.

Soit $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}_+^*$. On veut montrer l'inégalité

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i}\right) \geqslant n^2.$$

1. **Première solution.**
   (a) Montrer (le plus efficacement possible) l'inégalité $\forall t \in \mathbb{R}_+^*, t + \dfrac{1}{t} \geqslant 2$.
   (b) Conclure.
2. **Deuxième solution.** Conclure directement à l'aide de l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

Exercice 10$^+$ (Inégalité de corrélation de Čebyšëv, par réarrangement).

Soit $a_1 \leqslant a_2 \leqslant \dots \leqslant a_n$, $b_1 \leqslant b_2 \leqslant \dots \leqslant b_n$ deux familles croissantes indexées par $[\![1, n]\!]$. Montrer

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k\, b_k \geqslant \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i\right)\left(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} b_j\right)$$

en utilisant l'inégalité de réarrangement.

Convexité

Généralités

Autocorrection D.

Soit I un intervalle et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction convexe et $a, b \in \mathbb{R}$. On pose $J = \{x \in \mathbb{R} \mid ax + b \in I\}$.

Montrer que J est un intervalle et que $g : \begin{cases} J \to & \mathbb{R} \\ x \mapsto & f(ax+b) \end{cases}$ est une fonction convexe.

Autocorrection E.

1. Soit $f : I \to J$ convexe et $g : J \to \mathbb{R}$ convexe et croissante. Montrer que $g \circ f$ est convexe.
2. Énoncer et démontrer un autre résultat de composition analogue à celui-ci, mais mettant en jeu au moins une fonction concave.
3. Donner un contre-exemple si g n'est plus supposée croissante.

Exercice 11.

1. Montrer que les fonctions convexes et concaves sont exactement les fonctions affines.
2. Soit $f, g : I \to \mathbb{R}$ convexes telles que $f + g$ est affine. Montrer que f et g sont affines.

Exercice 12.

Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ convexes et impaires.

Exercice 13.

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ convexe.

1. Montrer que pour tout $a \in I$, la fonction $p_a : \begin{cases} I \setminus \{a\} \to & \mathbb{R} \\ x \quad \mapsto & \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} \end{cases}$ est croissante.
2. Soit $a_1 < b_1$ et $a_2 < b_2$ quatre éléments de I.

   Montrer que si $a_1 \leqslant a_2$ et $b_1 \leqslant b_2$, alors $\dfrac{f(b_1)-f(a_1)}{b_1-a_1} \leqslant \dfrac{f(b_2)-f(a_2)}{b_2-a_2}$.

Exercice 14$^+$.

Soit $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$. Montrer que la fonction $x \mapsto x\,f(x)$ est convexe si et seulement si $x \mapsto f\left(\dfrac{1}{x}\right)$ l'est.

Exercice 15.

Soit $f \in D^1(I)$ dont le graphe est au-dessus de toutes ses tangentes. Montrer que f est convexe.

Exercice 16.

Soit $a \in I$ et $f : I \to \mathbb{R}$ convexe et dérivable en a. Montrer que $\forall x \in I, f(x) \geqslant f'(a)(x-a)+f(a)$.

Exercice 17.

Une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est dite *strictement convexe* si, pour tous $a < b \in I$, on a

$$\forall \lambda \in]0,1[\,, f\big((1-\lambda)a+\lambda b\big) < (1-\lambda)f(a)+\lambda f(b).$$

1. Soit $f \in D^1(I)$, de dérivée strictement croissante. Montrer que f est strictement convexe.
2. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ strictement convexe. Soit $\lambda_1, \dots, \lambda_n > 0$ tels que $\lambda_1 + \dots + \lambda_n = 1$ et $a_1, \dots, a_n \in I$.

   Montrer que si $f\left(\displaystyle\sum_{i=1}^n \lambda_i\, a_i\right) = \displaystyle\sum_{i=1}^n \lambda_i\, f(a_i)$, alors $a_1 = \dots = a_n$.
3. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\left(\dfrac{n+1}{2}\right)^n \geqslant n!$, et préciser les cas d'égalité.

Exercice 18.

Montrer que la fonction arcsin est convexe sur $[0,1]$.

Exercice 19.

À quelle condition une fonction polynomiale de degré impair est-elle convexe sur $\mathbb{R}$?

Propriétés globales des fonctions convexes

Autocorrection F.

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ convexe et $a \in \mathbb{R}$. Montrer que $g : \begin{cases} \mathbb{R}_+ \to & \mathbb{R} \\ x \mapsto & f(a-x)+f(a+x) \end{cases}$ est croissante.

Exercice 20.

Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ concave. Montrer $\forall x, y \in \mathbb{R}_+, f(x+y) \leqslant f(x)+f(y)$.

Exercice 21.

1. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ convexe et majorée. Montrer que f est constante.
2. Le résultat subsiste-t-il sur $\mathbb{R}_+$?

Exercice 22.

Soit I un intervalle ouvert et $f : I \to \mathbb{R}$ convexe.

1. On suppose f dérivable. Montrer que si f admet un extremum local en $a \in I$, alors elle admet en ce point un minimum global.
2. On ne suppose plus f dérivable.
   (a) On suppose que f admet un minimum local en $a \in I$. Montrer qu'elle admet en ce point un minimum global.
   (b)$^+$ Peut-elle admettre en un point un maximum local ?
3. Que dire de l'ensemble des points en lesquels f admet un minimum ?

Applications

Autocorrection G.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer $\forall x, y \in \mathbb{R}_+, (x+y)^n \leqslant 2^{n-1}(x^n + y^n)$.

Exercice 23 (Démonstration de Pietro Mengoli, 1650).

1. Montrer que $\forall x > 1, \dfrac{1}{x-1} + \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x+1} \geqslant \dfrac{3}{x}$.
2. En déduire que la suite $(H_n)_{n \in \mathbb{N}^*} = \left(\sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ n'est pas majorée.

Exercice 24.

Montrer $\forall x_1, x_2 > 1, \ln\left(\dfrac{x_1 + x_2}{2}\right) \geqslant \sqrt{\ln(x_1)\ \ln(x_2)}$:

- en utilisant deux fois l'inégalité arithmético-géométrique ;
- *via* la fonction $\ln \circ \ln$.

Exercice 25.

Soit $r_1, \dots, r_n \geqslant 1$. Montrer que

$$\frac{n}{1 + \sqrt[n]{r_1 \cdots r_n}} \leqslant \frac{1}{1+r_1} + \cdots + \frac{1}{1+r_n}.$$

Exercice 26.

Soit $x, y, z > 0$ telle que $x + y + z = 1$. Montrer que $\left(1 + \dfrac{1}{x}\right)\left(1 + \dfrac{1}{y}\right)\left(1 + \dfrac{1}{z}\right) \geqslant 64$.

Exercice 27.

1. Démontrer $\forall k \in \mathbb{N}^*, \sqrt{k+1} - \sqrt{k} \leqslant \dfrac{1}{2\sqrt{k}}$.
2. En déduire l'existence de deux constantes A et B telles que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, 2\sqrt{n} + A \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} \leqslant 2\sqrt{n} + B.$$

Exercice 28.

Soit $p \in]0,1[$. On considère la fonction $f_p : \begin{cases} \mathbb{R}_+ \to & \mathbb{R} \\ x \mapsto & \begin{cases} x^p & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases} \end{cases}$.

1. (a) Montrer que $t \mapsto t^p$ est concave (sur $\mathbb{R}_+^*$).
   (b) En déduire que f_p est concave (sur $\mathbb{R}_+$).
2. (a) Montrer $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}_+, \left(x_1 + x_2\right)^p \leqslant x_1^p + x_2^p$.
   (b) Montrer $\forall x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}_+, \left(\sum_{i=1}^n x_i\right)^p \leqslant \sum_{i=1}^n x_i^p$.

Exercice 29.

Soit $A \in \mathbb{R}_+$. Trouver λ et $\mu \in \mathbb{R}$ les plus petits possibles tels que

$$\forall x \in [-A, A], e^x \leqslant \lambda x + \mu.$$

Exercice 30.

Soit α, β, γ les angles (géométriques) d'un triangle. Montrer

$$\frac{1}{1+\sin\alpha} + \frac{1}{1+\sin\beta} + \frac{1}{1+\sin\gamma} \geqslant \frac{6}{2+\sqrt{3}}.$$

Exercice 31.

Soit $n \geqslant 4$. Montrer que de tous les polygones à n côtés inscrits dans un cercle, le polygone régulier est celui qui a l'aire maximale.

Exercice 32$^+$.

1. Soit $\varphi : [0,1]^2 \to \mathbb{R}$ telle que
   - pour tout $a \in [0,1]$, la fonction $y \mapsto \varphi(a,y)$ est convexe ;
   - pour tout $b \in [0,1]$, la fonction $x \mapsto \varphi(x,b)$ est convexe.

   Montrer qu'alors $\forall (x,y) \in [0,1]^2, \varphi(x,y) \leqslant \max\left(\varphi(0,0), \varphi(0,1), \varphi(1,0), \varphi(1,1)\right)$.
2. Montrer $\forall x, y, z \in [0,1], \dfrac{x^2}{1+y+z} + \dfrac{y^2}{1+x+z} + \dfrac{z^2}{1+x+y} \leqslant 1$.

Exercice 33^{++} (Inégalité de Popoviciu).

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ convexe et $x, y, z \in I$. Montrer

$$\frac{2}{3}\left[f\left(\frac{x+y}{2}\right) + f\left(\frac{y+z}{2}\right) + f\left(\frac{z+x}{2}\right)\right] \leqslant \frac{1}{3}\left[f(x) + f(y) + f(z)\right] + f\left(\frac{x+y+z}{3}\right).$$

Exercice 34$^+$ (Inégalités de Young, de Hölder et de Minkowski).

Dans tout l'exercice, on fixe $p, q \in [1, +\infty[$ tels que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$.

1. Montrer l'*inégalité de Young* : $\forall a, b \in \mathbb{R}_+,\ a^{1/p} b^{1/q} \leqslant \dfrac{1}{p} a + \dfrac{1}{q} b$.
2. Pour tout $\ell \geqslant 1$ et tout $x \in \mathbb{R}^n$, on note $\|x\|_\ell = \left(\displaystyle\sum_{i=1}^n |x_i|^\ell \right)^{1/\ell}$.
   (a) Soit $x, y \in \mathbb{R}^n$ tels que $\|x\|_p = \|y\|_q = 1$.

   En utilisant l'inégalité de Young, montrer $\displaystyle\sum_{i=1}^n x_i\, y_i \leqslant 1$.

   (b) En déduire *l'inégalité de Hölder* : $\forall x, y \in \mathbb{R}^n, \displaystyle\sum_{i=1}^n x_i\, y_i \leqslant \|x\|_p\, \|x\|_q$.

   (c) Peut-on étendre cette inégalité dans le cas $p = 1$?
3. Soit $x, y \in \mathbb{R}^n$.
   (a) Montrer $\|x+y\|_p^p \leqslant \displaystyle\sum_{i=1}^n |x_i|\, |x_i + y_i|^{p-1} + \sum_{i=1}^n |y_i|\, |x_i + y_i|^{p-1}$.

   (b) En appliquant habilement l'inégalité de Hölder, montrer *l'inégalité de Minkowski* :
$$\|x+y\|_p \leqslant \|x\|_p + \|y\|_p.$$

Mélange

Exercice 35$^+$.

Une fonction $f : I \to \mathbb{R}_+^*$ est dite *log-convexe* (ou *logarithmiquement convexe*) si $\ln \circ f$ est convexe.

1. Montrer qu'une fonction log-convexe est convexe. La réciproque est-elle vraie ?
2. Montrer que f est log-convexe si et seulement si, pour tout $\alpha > 0$, la fonction f^α est convexe.
3. Montrer que f est log-convexe si et seulement si, pour tout $\beta \in \mathbb{R}$, $x \mapsto e^{\beta x} f(x)$ est convexe.
4. Montrer que la somme et le produit de deux fonctions log-convexes est log-convexe.

Exercice 36^{++}.

Soit $f \in C^3(\mathbb{R})$. Montrer $\exists a \in \mathbb{R} : f(a)\, f'(a)\, f''(a)\, f'''(a) \geqslant 0$.