Matrices

Généralités

Autocorrection A.
Calculer les produits suivants (les résultats devraient être simples).

(i) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -9 & 1 & 1 & 11 \\ 1 & 1 & 11 & -9 \\ 1 & 11 & -9 & 1 \\ 11 & -9 & 1 & 1 \end{pmatrix}$; (ii) $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 6 & 8 & 5 \\ 7 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10 & -12 & -4 \\ -35 & 42 & 13 \\ 44 & -52 & -16 \end{pmatrix}$.

Exercice 1.
Soit $v \in \mathbb{R}^n$ un vecteur, que l'on voit comme une matrice colonne. Que dire si $v^T v = 0$?

Exercice 2.
Soit $M \in M_n(K)$ et $J \in M_n(K)$ la matrice dont tous les coefficients sont égaux à 1. Calculer JMJ.

Exercice 3.
Déterminer deux matrices carrées A et B de $M_2(K)$ telles que :
(i) $AB = 0$ et $BA \neq 0$.
(ii) $AB = 0$, $BA = 0$, $A \neq 0$ et $B \neq 0$.

Exercice 4.
Étant donné une matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$, on définit sa *norme de Frobenius* $\|A\|_F = \sqrt{\operatorname{tr}(A^T A)}$.

1. Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$. Exprimer $\|A\|_F$ en fonction des coefficients de A. Quid si $\|A\|_F = 0$?
2. Montrer que la norme de Frobenius est *sous-multiplicative*, c'est-à-dire
$$\forall A, B \in M_n(\mathbb{R}), \|AB\|_F \leqslant \|A\|_F \|B\|_F.$$
3. L'égalité $\forall A, B \in M_n(\mathbb{R}), \|AB\|_F = \|A\|_F \|B\|_F$ a-t-elle une chance d'être vraie ?

Exercice 5.
Pour $a, b \in \mathbb{R}$, on définit la matrice $S(a,b) = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$.

1. Soit $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Calculer la somme $S(a,b) + S(c,d)$ et le produit $S(a,b)S(c,d)$. En déduire en particulier que $S(a,b)$ et $S(c,d)$ commutent.
2. Calculer le produit $S(a,b)\, S(a,b)^T$.
3. À quelle condition la matrice $S(a,b)$ est-elle inversible ? Le cas échéant, donner son inverse.
4. Soit $\theta \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{Z}$. Calculer la puissance n-ième de la matrice $S(\cos\theta, \sin\theta)$.

Exercice 6.
On pose
$$\mathbb{H} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -\overline{b} & \overline{a} \end{pmatrix} \middle| (a,b) \in \mathbb{C}^2 \right\} \subseteq M_2(\mathbb{C}).$$

1. Montrer que l'ensemble $\mathbb{H}$ est stable par somme et par produit.
2. Déterminer l'ensemble des matrices inversibles de $\mathbb{H}$. Montrer que l'inverse d'une telle matrice est encore un élément de $\mathbb{H}$.

Exercice 7.

Déterminer les matrices $X \in M_2(\mathbb{R})$ à coefficients entiers telles que $X^2 + X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 8.

Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(K)$. Montrer qu'il existe $\delta \in K$ tel que $A^2 - (\operatorname{tr} A)A + \delta\, I_2 = 0$.

Exercice 9.

Soit A et $B \in M_n(K)$. On suppose $\forall X \in M_n(K), \operatorname{tr}(AX) = \operatorname{tr}(BX)$. En déduire $A = B$.

Exercice 10$^+$.

Soit $n \geqslant 2$. Montrer qu'il n'existe pas de couple $(P, Q) \in M_n(K)^2$ tel que $PQ - QP = I_n$.

Exercice 11.

Soit $n \geqslant 1$ un entier. Montrer que toute matrice carrée d'ordre n s'écrit de façon unique comme la somme d'une matrice symétrique et d'une matrice antisymétrique.

Commutation

Exercice 12.

Soit $A, B \in S_n(\mathbb{R})$. Montrer que $AB \in S_n(\mathbb{R})$ si et seulement si $AB = BA$.

Exercice 13.

Soit $d_1, d_2, \ldots, d_n \in K$ tous distincts et $D = \operatorname{diag}(d_1, \ldots, d_n) \in M_n(K)$.

Déterminer l'ensemble des matrices $A \in M_n(K)$ qui commutent avec D.

Exercice 14.

Soit $d_1, d_2, \ldots, d_n \in K$ tous distincts. On pose $d_{n+1} = d_n$ et $D = \operatorname{diag}(d_1, \ldots, d_n, d_{n+1}) \in M_{n+1}(K)$.

Déterminer l'ensemble des matrices $A \in M_{n+1}(K)$ qui commutent avec D.

Exercice 15.

Soit $A \in M_n(K)$ telle que $\forall B \in M_n(K)$, $AB = BA$ (on dit que A est dans le *centre* de $M_n(K)$).

Montrer que A est une matrice scalaire.

Exercice 16$^+$.

Soit $A \in T_n^+(\mathbb{R})$ une matrice commutant avec sa transposée. Montrer que A est diagonale.

Exercice 17$^+$.

Soit $n \geqslant 2$. Déterminer l'ensemble des matrices $M \in M_n(\mathbb{R})$ qui commutent avec toutes les matrices antisymétriques.

Exercice 18^{++}.

Soit $A, B \in M_n(K)$ telles que $AB = A + B$. Montrer que A et B commutent.

Puissances

Autocorrection B. ☑

Soit $x \in \mathbb{R}$ et $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -\sin x \\ -1 & 0 & \cos x \\ -\sin x & \cos x & 0 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$. Calculer A^3 puis les puissances de $I_3 + A$.

Exercice 19. ☑

Calculer les puissances successives des matrices suivantes (a et b désignent des paramètres complexes, θ un paramètre réel, n est un nombre entier $\geqslant 1$).

(i) $a\,I_n$;

(ii) $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$;

(iii) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$;

(iv) $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$;

(v) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$;

(vi) $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$;

(vii) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

(viii) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$;

(ix) $J_n = (1)_{\substack{1\leqslant i\leqslant n \\ 1\leqslant j\leqslant n}} \in M_n(\mathbb{C})$;

(x) $\begin{pmatrix} a & b & b & \cdots & b \\ b & a & b & \ddots & \vdots \\ b & \ddots & \ddots & \ddots & b \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & b \\ b & \cdots & b & b & a \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{C})$.

Exercice 20$^+$.

Soit $A = \left(\mathbb{1}_{(i\leqslant j)}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in M_n(\mathbb{R})$. Calculer A^3.

Exercice 21.

Soit $L \in M_{1,n}(\mathbb{C})$ et $C \in M_{n,1}(\mathbb{C})$. Calculer, pour tout $p \geqslant 0$, les puissances $(LC)^p$ et $(CL)^p$.

Exercice 22.

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & x \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in M_4(K)$.

1. Calculer A^4.
2. Montrer que A est inversible si et seulement si $x \neq 0$.
3. Lorsque $x \neq 0$, déterminer A^n pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

Exercice 23.

Soit $x, y, z \in \mathbb{R}$. On note $A = \begin{pmatrix} x^2 & xy & xz \\ xy & y^2 & yz \\ xz & yz & z^2 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$.

1. Exprimer A comme le produit d'une colonne et d'une ligne.
2. En déduire les puissances de A.

Exercice 24.

Soit $x, \theta \in \mathbb{R}$. Calculer les puissances de

$$\begin{pmatrix} x+\sin\theta & \cos\theta \\ \cos\theta & x-\sin\theta \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}).$$

Exercice 25.

Soit $A = \begin{pmatrix} 3/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$.

1. Calculer $(A - I_2)^2$.
2. Déterminer le reste dans la division euclidienne de X^{100} par $(X-1)^2$.
3. En déduire A^{100}.

Exercice 26.

1. Soit $A, B, C \in M_n(K)$ tels que $\forall k \in \{1,2,3\}, A^k = B + kC$. Montrer que $\forall k \in \mathbb{N}^*, A^k = B + kC$.
2. Donner des exemples (pas trop triviaux) de matrices A, B et C vérifiant cette propriété.

Exercice 27$^+$.

On dit qu'une matrice carrée est *nilpotente* si l'une de ses puissances est nulle.

Soit A et B deux matrices nilpotentes qui commutent. Montrer que $A+B$ et AB sont également nilpotentes. Que dire si l'on enlève l'hypothèse de commutativité ?

Exercice 28$^+$.

Soit $T \in M_n(K)$ une matrice triangulaire dont les coefficients diagonaux sont nuls.

Montrer que T^n est nulle.

Inversibilité

Exercice 29.

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Calculer $A^2 - A$. En déduire que A est inversible et déterminer A^{-1}.

Exercice 30.

Montrer que la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \in T_n^+(K)$ est inversible, et déterminer son inverse.

Exercice 31.

Soit $n \geqslant 2$. Pour $a, b \in \mathbb{C}$, on définit $M = M(a,b) = \begin{pmatrix} a & b & \cdots & b \\ b & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b \\ b & \cdots & b & a \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{C})$.

1. Calculer M^2 en fonction de M et de I_n.
2. En déduire une condition nécessaire et suffisante pour que $M(a,b)$ soit inversible, et exprimer l'inverse, le cas échéant.

Exercice 32$^+$ (Matrice de Fourier).

Soit $n \geqslant 1$ et $\omega = \exp\left(i\dfrac{2\pi}{n}\right)$. On pose $F = \left(\omega^{(i-1)(j-1)}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$.

Calculer $F\overline{F}$. En déduire que $F \in GL_n(\mathbb{C})$ et calculer son inverse.

Exercice 33.

1. Soit $M \in M_n(K)$. On suppose qu'il existe des scalaires $a_0, a_1, a_2, \dots, a_d$ tels que
$$a_0 I_n + a_1 M + a_2 M^2 + \cdots + a_d M^d = 0$$
et qu'en outre, $a_0 \neq 0$. Montrer que M est inversible et déterminer son inverse.
2. Pour $n \geqslant 2$, la matrice carrée de taille n dont tous les coefficients diagonaux sont nuls et dont tous les autres coefficients valent 1 est-elle inversible ?

Exercice 34$^+$.

1. Soit $M \in M_n(K)$ et $p \in \mathbb{N}^*$ tels que $M^p = 0$. Montrer que $I_n - M$ est inversible et déterminer son inverse.
2. En déduire que la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 3 & 1 & -2 \\ -3 & 6 & 1 \end{pmatrix}$ est inversible et calculer son inverse.

Exercice 35$^+$.

Existe-t-il $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ telles que $\forall M \in M_n(\mathbb{R}), M^T = AMB$?

Exercice 36$^+$.

Montrer que toute matrice de $M_n(K)$ est somme de deux matrices inversibles.

Calculs par blocs

Autocorrection C.

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ et $M = \begin{pmatrix} A & A \\ 0 & I_n \end{pmatrix}$.

1. Calculer M^2 et M^3.
2. Conjecturer une formule générale pour $(M^k)_{k\in\mathbb{N}}$, et la démontrer.

Exercice 37.

Soit $A, B, C, D \in M_n(K)$. On pose $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$.

1. Déterminer M^T.
2. À quelle condition la matrice M est-elle symétrique ?

Exercice 38.

Soit $A \in M_n(K)$. On définit les matrices par blocs

$$N = \begin{pmatrix} 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & A \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad U = \begin{pmatrix} I_n & A & 0 \\ 0 & I_n & A \\ 0 & 0 & I_n \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad M = \begin{pmatrix} A & A & 0 \\ 0 & A & A \\ 0 & 0 & A \end{pmatrix}.$$

Calculer successivement $(N^k)_{k\in\mathbb{N}}$, $(U^k)_{k\in\mathbb{N}}$, et $(M^k)_{k\in\mathbb{N}}$.

Exercice 39.

1. Soit $A \in M_n(K)$ et $C \in K^n$. On pose $\widetilde{A} = \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in M_{n+1}(K)$.
   (a) Déterminer une expression de $\widetilde{A}^k$, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.
   (b) En déduire que si $r \in \mathbb{N}$ vérifie $A^r = 0$, alors $\widetilde{A}^{r+1} = 0$.
2. Montrer que si tous les coefficients diagonaux de $M \in T_n^+(K)$ sont nuls, alors $M^n = 0$.

Exercice 40. ☑

1. Déterminer toutes les matrices commutant avec la matrice $\begin{pmatrix} 0 & I_n \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in M_{2n}(K)$.
2. Même question avec la matrice $\begin{pmatrix} \lambda I_n & 0 \\ 0 & \mu I_n \end{pmatrix} \in M_{2n}(K)$, quel que soit le couple $(\lambda, \mu) \in K^2$.

Exercice 41. ☑

Soit $A_{1,1} \in M_n(K)$, $A_{2,2} \in M_m(K)$ et $A_{1,2} \in M_{n,m}(K)$.

1. Montrer que la matrice $M = \begin{pmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} \\ 0 & A_{2,2} \end{pmatrix} \in M_{n+m}(K)$ est inversible si et seulement si les blocs diagonaux $A_{1,1}$ et $A_{2,2}$ le sont.
2. On suppose $A_{1,1}$ et $A_{2,2}$ inversibles. Déterminer M^{-1}.

Exercice 42$^+$.

Soit $\widetilde{M} = \begin{pmatrix} M & C \\ L & m \end{pmatrix} \in M_{n+1}(K)$ une matrice par blocs, où $M \in GL_n(K)$.

Montrer que $\widetilde{M}$ est inversible si et seulement si $m \neq LM^{-1}C$ (où l'on a identifié $LM^{-1}C \in M_1(K)$ à son unique coefficient).