Polynômes

Généralités

Autocorrection A.

Soit $P = X^3 - X^2 + 3X - 1$ et $Q = 2X^2 - X + 1$. Calculer PQ, P^2, Q^2, $P \circ Q$ et $Q \circ P$.

Autocorrection B.

Soit $n \geqslant 1$. Donner rapidement le degré, le coefficient dominant et le coefficient constant de

$$(X+1)^n + (X-1)^n \qquad \text{et} \qquad (X+1)^n - (X-1)^n.$$

Exercice 1.

Déterminer tous les polynômes $P \in \mathbb{K}[X]$ tels que

(i) $P(2X) = P(X) - 1$;

(ii) $P(X^2) = (X^2+1)P$;

(iii) $P \circ P = P$;

(iv) $\exists Q \in \mathbb{K}[X] : Q^2 = XP^2$.

Exercice 2.

On considère la suite de polynômes $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$P_0 = 1, \qquad P_1 = (-2X) \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N}, P_{n+2} = -2XP_{n+1} - 2(n+1)P_n.$$

1. Calculer P_2, P_3 et P_4.
2. Déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, le degré et le coefficient dominant de P_n.
3. Montrer que les polynômes constituant la suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont alternativement pairs et impairs (en tant que fonctions polynomiales).
4. Déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P_{2n+1}(0)$.
5. Déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P_{2n}(0)$.

Exercice 3.

1. Soit $P \in \mathbb{K}[X]$.

   Montrer qu'il existe un unique couple $(R_0, R_1) \in \mathbb{K}[X]^2$ tel que $P = R_0(X^2) + X\,R_1(X^2)$.
2. Soit $P, Q \in \mathbb{K}[X]$ tels que $P(X)^2 = Q(X^2)$.

   Montrer qu'il existe $R \in \mathbb{K}[X]$ tel que $P = R(X^2)$ ou $P = X\,R(X^2)$.

Exercice 4$^+$.

1. Si $p \in \mathbb{N}^*$, que vaut $S_p = \displaystyle\sum_{z\in\mathbb{U}_n} z^p$?
2. Soit $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{d} a_k X^k \in \mathbb{C}[X]$ de degré $d \geqslant 1$. Montrer $\exists z \in \mathbb{U} : |P(z)| \geqslant \max_{i=0}^{d} |a_i|$.

Exercice 5^{++}.

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$, de degré $< n$.

1. Pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, calculer $\dfrac{1}{n} \displaystyle\sum_{\omega \in \mathbb{U}_n} P(\omega)\, \omega^{-k}$.
2. On suppose maintenant $P \in \mathbb{Z}[X]$, $P(0) = 1$ et $\forall \omega \in \mathbb{U}_n, P(\omega) \in \mathbb{R}_+$.

   Montrer que les coefficients de P appartiennent tous à $\{0, -1, 1\}$.

Exercice 6^{+}.

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $P, Q \in \mathbb{R}[X]$ deux polynômes différents de degré n. Montrer que

$$\deg\left(P^3 - Q^3\right) \geqslant 2n.$$

Le résultat reste-t-il vrai si $P, Q \in \mathbb{C}[X]$?

Exercice 7^{+}.

Soit $P \in K[X]$. Montrer qu'il existe $Q \in K[X]$ tel que $P(P(X)) - X = Q(X)\big(P(X) - X\big)$.

Exercice 8^{+}.

Alice et Bob jouent ensemble : Bob pense à un polynôme P à coefficients dans $\mathbb{N}$ et Alice doit le deviner. À chaque tour, Alice choisit un entier $k \in \mathbb{Z}$ et Bob lui donne la valeur de $P(k)$. En combien de tours Alice (qui sait dès le début que les coefficients de P sont dans $\mathbb{N}$, mais n'a pas plus d'information sur ce polynôme ou son degré) peut-elle deviner P ?

Formule de convolution de Vandermonde

Exercice 9^{+} (Formule de convolution de Vandermonde).

Soit $n \in \mathbb{N}$.

1. Soit $p, q \in \mathbb{N}$. En calculant de deux façons différentes le produit $(1+X)^p(1+X)^q$, montrer la *formule de convolution de Vandermonde* :
$$\sum_{k=0}^{n} \binom{p}{k}\binom{q}{n-k} = \binom{p+q}{n}.$$
2. En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$.

Exercice 10^{++}.

Soit $n \geqslant 1$. Montrer

$$\sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \left(\binom{n}{k} - \binom{n}{k-1}\right)^2 = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}.$$

Exercice 11^{++}.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Montrer *l'identité de De Moivre* (1756) : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k\binom{2n}{n+k} = n\binom{2n-1}{n}$.
2. En déduire les valeurs de $\displaystyle\sum_{0 \leqslant k, \ell \leqslant n} \max(k, \ell)\binom{n}{k}\binom{n}{\ell}$ et $\displaystyle\sum_{0 \leqslant k, \ell \leqslant n} \min(k, \ell)\binom{n}{k}\binom{n}{\ell}$.

Racines

Autocorrection C.

Déterminer tous les polynômes tels que $\forall k \in \mathbb{N}, P(k) = k^3$.

Exercice 12.

Montrer que tout polynôme de degré impair à coefficients réels possède (au moins) une racine réelle.

Exercice 13$^+$.

Soit $P \in \mathbb{Q}[X]$ tel que $P(\sqrt{2}) = 0$. Montrer que $P(-\sqrt{2}) = 0$.

Exercice 14.

1. Montrer que tout polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que $P(X+1) = P(X)$ est constant.
2. Résoudre l'équation $P(X+1) - P(X) = X$, d'inconnue $P \in \mathbb{C}[X]$.

Exercice 15.

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ tel qu'il existe une infinité de réels α tels que $P(\alpha) \in \mathbb{R}$. Montrer que $P \in \mathbb{R}[X]$.

Exercice 16.

Trouver tous les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que $\forall x, y \in \mathbb{R}, P(xy) = P(x)\,P(y)$.

Exercice 17.

Déterminer tous les polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ tels que $(X+1)\,P(X) = X\,P(X+2)$.

Exercice 18 (Polynômes de Čebyšëv de première espèce).

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer qu'il existe un unique $T_n \in \mathbb{R}[X]$ tel que $\forall \theta \in \mathbb{R}, \cos(n\,\theta) = T_n(\cos\theta)$.
2. Montrer $\forall n \in \mathbb{N}, T_{n+2} = 2X\,T_{n+1} - T_n$.
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, déterminer :
   - le degré et le coefficient dominant de T_n ;
   - les racines de T_n, d'abord dans $[-1, 1]$, puis dans $\mathbb{C}$.

Exercice 19$^+$.

Soit $P, Q, R \in \mathbb{R}[X]$ tels que $Q \circ P = R \circ P$.

1. Montrer que si P n'est pas constant, alors $Q = R$.
2. Montrer que l'on ne peut pas étendre la question précédente à tous les polynômes P.

Exercice 20$^+$.

1. Déterminer les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que $\forall x \in [0, 1], |P(x)| = 1$.
2. Même question pour les polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$.

Exercice 21^{++}.

Déterminer les polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ vérifiant $\forall z \in \mathbb{U}, P(z) \in \mathbb{U}$.

Rigidité des fonctions polynomiales

Autocorrection D.
Déterminer tous les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que $\forall n \in \mathbb{N}, P(n) = n^2 + (-1)^n$.

Exercice 22.

1. Montrer que la fonction $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ n'est pas polynomiale.
2. Montrer que la fonction $c : \begin{cases} \mathbb{C} \to \mathbb{C} \\ z \mapsto \overline{z} \end{cases}$ n'est pas polynomiale.
3. (a) Montrer que $\cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ n'est pas une fonction polynomiale.
   (b) Montrer que $\cos_{|\pi\mathbb{Z}}$ n'est pas une fonction polynomiale.
   (c) Montrer que $\cos_{|[0,2\pi]}$ n'est pas une fonction polynomiale.
   (d) Existe-t-il un ensemble infini $E \subseteq \mathbb{R}$ tel que $\cos_{|E}$ soit une fonction polynomiale ?

Exercice 23.
Montrer qu'il n'existe pas de polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que

$$\exists A > 0 : \forall x \geqslant A, P(x) = \ln(x).$$

Exercice 24$^+$.
Montrer qu'il n'existe pas de polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

(i) $P(k) = \dfrac{1}{k}$; (ii) $P(k) = \sqrt{k^2+1}$; (iii) $P(k) = 2^k$.

Exercice 25.
Soit $P, Q \in \mathbb{R}[X]$ deux polynômes différents. Montrer que

$$(\exists A \in \mathbb{R} : \forall t \geqslant A, P(t) < Q(t)) \qquad \text{ou} \qquad (\exists A \in \mathbb{R} : \forall t \geqslant A, P(t) > Q(t)).$$

Localisation des racines

Exercice 26 (Borne de Cauchy).
Soit $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ un polynôme unitaire. On note $Z(P)$ l'ensemble des racines complexes de P.

1. Montrer $\forall \zeta \in Z(P), |\zeta|^n \leqslant \sum_{k=0}^{n-1} |a_k|\, |\zeta|^k$ et en déduire $\forall \zeta \in Z(P) \setminus \{0\}, |\zeta| \leqslant \sum_{\ell=0}^{n-1} \dfrac{|a_{n-1-\ell}|}{|\zeta|^\ell}$.
2. Utiliser la question précédente pour montrer
$$\forall \zeta \in Z(P), |\zeta| \leqslant \max\left(1, \sum_{k=0}^{n-1} |a_k|\right).$$
3. En réutilisant le résultat de la première question, montrer la *borne de Cauchy*
$$\forall \zeta \in Z(P), |\zeta| \leqslant 1 + \max(|a_0|, \ldots, |a_{n-1}|).$$

Exercice 27$^+$ (Théorème d'Eneström-Kakeya). X

Soit $P = a_0 + a_1X + \cdots + a_nX^n \in \mathbb{R}[X]$ tel que $\forall i \in [\![0,n]\!]$, $a_i > 0$.

1. On suppose $a_0 \geqslant a_1 \geqslant \cdots \geqslant a_n$. Montrer que toutes les racines de P sont de module $\geqslant 1$.
2. Montrer qu'en général, les racines de P sont toutes dans la couronne

$$C(r,R) = \{z \in \mathbb{C} \mid r \leqslant |z| \leqslant R\},$$

où r (resp. R) est le minimum (resp. maximum) des $\left(\dfrac{a_k}{a_{k+1}}\right)_{k=0}^{n-1}$.

Division euclidienne

Autocorrection E.

Soit $P \in K[X]$ et $a, b \in K$ deux scalaires différents. Déterminer le reste dans la division euclidienne de P par $(X-a)(X-b)$ en fonction de a, b, $P(a)$ et $P(b)$.

Exercice 28.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer le reste de la division euclidienne de A par B dans les cas suivants :

(i) $A = X^n$ et $B = X^2 - 3X + 2$;
(ii) $A = X^n$ et $B = (X-1)^2$;
(iii) $A = (X \sin t + \cos t)^n$ et $B = X^2 + 1$, où t est un réel.

Exercice 29.

Déterminer le reste de la division euclidienne de $X^{42} + X^{1729} + X^{11\,111}$ par $1 + X + X^2$.

Exercice 30.

Trouver les racines complexes des polynômes suivants.

- $P_1 = X^3 + (i-3)X^2 + (7-2i)X - 5(1+i)$, en sachant qu'il a une racine imaginaire pure ;
- $P_2 = X^4 + 4iX^2 + 12(1+i)X - 45$, en sachant qu'il a une racine réelle et une imaginaire pure.

Exercice 31$^+$.

Soit $f : x \mapsto \dfrac{x^3}{x^2+2x+3}$. Déterminer les points entiers de son graphe, c'est-à-dire $\mathbb{Z}^2 \cap \mathrm{gr}(f)$.

Dérivation

Autocorrection F.

Soit $k \in \mathbb{N}$. On définit une suite de polynômes $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par

$$P_0 = X^k \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N}, P_{n+1} = XP_n'.$$

Donner une expression simple pour la suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 32.

Trouver une partie $H \subseteq \mathbb{C}[X]$ telle que la dérivation $\begin{cases} H \to \mathbb{C}[X] \\ P \mapsto P' \end{cases}$ soit une bijection.

Exercice 33.

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$. Donner un sens à la somme $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(k+1)!} P^{(k)}(X)\, X^{k+1}$ et montrer qu'elle définit la « primitive » de P possédant 0 comme racine.

Exercice 34.

Déterminer tous les polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ tels que

(i) $P = P'$; (ii) $(P')^2 = 4P$.

Exercice 35.

Déterminer les $P \in \mathbb{C}[X]$ tels que $P(2X) = P'(X)P''(X)$.

Exercice 36.

Déterminer les polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ tels que $X(X+1)P'' + (X+2)P' - P = 0$.

Exercice 37.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Existe-t-il un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré n tel que $\forall k \in [\![0, n-1]\!], P^{(k)}(0) = P^{(k)}(1)$?

Exercice 38$^+$.

Soit $\mathcal{S} = \left\{(A, B) \in \mathbb{C}[X]^2 \;\middle|\; AB' - BA' = 1\right\}$. On veut décrire complètement cet ensemble.

1. Montrer que $\forall (A, B) \in \mathcal{S}, \forall \lambda \in \mathbb{C}, (A - \lambda B, B) \in \mathcal{S}$.
2. Soit $(A, B) \in \mathcal{S}$ un couple de polynômes non constants.

   En examinant les termes dominants, montrer que $\deg A = \deg B$.
3. Conclure, à l'aide des deux questions précédentes.

Exercice 39.

Trouver tous les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que $\forall k \in \mathbb{Z}, \displaystyle\int_k^{k+1} P(t)\,dt = k+1$.

Exercice 40.

On note $\mathcal{H} = \left\{P \in \mathbb{R}[X] \;\middle|\; \forall x \in \mathbb{R}, P(x) = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{x-1}^{x+1} P(t)\,dt\right\}$.

1. Déterminer $\mathcal{H} \cap \mathbb{R}_1[X]$, puis $\mathcal{H} \cap \mathbb{R}_2[X]$.
2. Montrer que $\mathcal{H}$ est stable par dérivation, c'est-à-dire $\forall P \in \mathcal{H}, P' \in \mathcal{H}$.
3. Que vaut $\mathcal{H}$?

Exercice 41.

Soit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ la suite de polynômes définie par

$$A_1 = X^2 + X \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N}^*, A_{n+1} = (X^2+1)A_n + XA_n'.$$

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, donner le degré et le terme dominant de A_n.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, déterminer $A_n(0)$.
3. En déduire qu'il existe une unique suite $(B_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de polynômes telle que $\forall n \in \mathbb{N}^*, A_n = XB_n$.
4. Calculer B_1 et obtenir une relation de récurrence sur la suite $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
5. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, calculer $B_n(0)$ et en déduire $A_n'(0)$.

Exercice 42.

Montrer que la fonction tan est lisse et qu'il existe une suite $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de polynômes à coefficients dans $\mathbb{N}$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\deg P_n = n+1$ et $\tan^{(n)} = P_n(\tan)$.

Exercice 43.

1. Montrer qu'il existe une unique suite de polynômes réels $(H_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $g : x \mapsto e^{-x^2}$ soit n fois dérivable, de dérivée n-ième $g^{(n)} : x \mapsto H_n(x)\, e^{-x^2}$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer le degré, le terme dominant, et la parité de H_n.
3. Montrer $\forall n \in \mathbb{N}, H'_{n+1} = -2(n+1)H_n$.
4. En déduire une expression de la suite $(g^{(n)}(0))_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 44.
Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Montrer que l'on peut trouver $A \in \mathbb{R}$ tel que la fonction polynomiale

$$\begin{cases} [A, +\infty[& \to \quad \mathbb{R} \\ \quad t & \mapsto P(t) \end{cases}$$

soit monotone.

Exercice 45$^+$.
Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que P induise une application surjective $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$. Montrer que $P = X$.

Exercice 46.
Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ et $a \in \mathbb{R}$ tels que $P(a) > 0$ et, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $P^{(k)}(a) \geqslant 0$.

Montrer que P ne possède pas de racines dans $[a, +\infty[$.

Interpolation de Lagrange

Autocorrection G.
Soit $z_0, \dots, z_n \in K$ tous distincts.

On note, pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, L_k l'unique polynôme de degré n tel que $\forall j \in [\![0, n]\!], L_k(x_j) = \delta_{k,j}$.

Identifier les polynômes $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} L_k$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} x_k\, L_k$.

Exercice 47.

Montrer $\forall n \in \mathbb{N}, \exists \lambda_0, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R} : \forall P \in \mathbb{R}_n[X], \displaystyle\int_0^1 P(t)\, dt = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k\, P\left(\frac{k}{n}\right)$.

Exercice 48.
Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que $\forall k \in [\![0, n]\!], P(k) = \dfrac{k}{k+1}$.

1. Déterminer le polynôme $Q = (X+1)P - X$.
2. En déduire $P(n+1)$.

Exercice 49$^+$.
Soit $r \in \mathbb{R}$. Soit $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ tel que $\forall k \in [\![1, n]\!], P(k) = r^k$. Calculer $P(n+1)$.

Exercice 50$^+$.
Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que $\forall k \in [\![1, n+1]\!], P(k) = \dfrac{1}{k}$. Calculer $P(0)$.

Exercice 51$^+$.

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ unitaire de degré n. Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{P(k)}{\prod_{j\neq k}(k-j)}$.

Multiplicité, polynômes scindés

Autocorrection H.
Soit $n \geqslant 3$ et $P = X^{2n+1} - (2n+1)X^{n+1} + (2n+1)X^n - 1 \in \mathbb{R}[X]$. Calculer l'ordre de multiplicité $\mu_1(P)$.

Exercice 52.
Montrer que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{X^k}{k!}$ n'a que des racines simples sur $\mathbb{C}$.

Exercice 53⁺. *Mines*
Soit $P(X) = nX^n - X^{n-1} - \cdots - X - 1$.

Montrer qu'à part 1, les racines de P sont de module < 1 puis que P est à racines simples.

Exercice 54.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré n simplement scindé.

Montrer que les racines complexes du polynôme $P^2 + 1$ dans $\mathbb{C}$ sont toutes simples.

Exercice 55⁺.
Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ simplement scindé. Montrer que P n'a pas deux coefficients consécutifs nuls.

Exercice 56⁺.
Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ non constant, simplement scindé.

Montrer que pour tout $a \in \mathbb{C}$, les racines complexes de $P - a$ sont de multiplicité au plus 2.

Exercice 57⁺. *Ulm*
Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ scindé. Montrer que toute racine multiple de P' est racine de P.

Exercice 58⁺.
Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ simplement scindé, et $a \in \mathbb{R}$. Montrer que $P' + aP$ est simplement scindé.

Relations coefficients-racines

Exercice 59.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Utiliser les relations de Viète pour recalculer $\displaystyle\sum_{\omega \in \mathbb{U}_n} \omega$, puis pour calculer $\displaystyle\prod_{\omega \in \mathbb{U}_n} \omega$ et $\displaystyle\sum_{\omega \in \mathbb{U}_n} \omega^2$.

Exercice 60.
Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ de degré $\geqslant 2$. Montrer que la moyenne des racines de P' (comptées avec multiplicité) est la même que celle des racines de P.

Exercice 61.
Soit $n \geqslant 2$ et $P = \displaystyle\prod_{j=1}^{n} (1 + X^j)$. Calculer $P\left(e^{i\frac{2\pi}{n}}\right)$.

Exercice 62.

Soit $a \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $(z+1)^n = e^{i\,2n\,a}$.
2. En déduire $\displaystyle\prod_{k=0}^{n-1} \sin\left(a + \frac{k\pi}{n}\right)$ puis $\displaystyle\prod_{k=1}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)$.

Exercice 63$^+$ (Sommes de Newton).

1. Exprimer $x^2+y^2+z^2$ et $x^3+y^3+z^3$ en fonction de $\sigma_1 = x+y+z$, $\sigma_2 = xy+xz+yz$ et $\sigma_3 = xyz$.
2. Résoudre le systèmes suivants, d'inconnues $x, y, z \in \mathbb{C}$ (ou $\mathbb{C}^*$) :

$$\begin{cases} x+y+z &= 1 \\ \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z} &= 1 \\ \quad xyz &= -4. \end{cases} \qquad \begin{cases} x+y+z = 2 \\ x^2+y^2+z^2 = 14 \\ x^3+y^3+z^3 = 20. \end{cases}$$

Exercice 64$^+$.

1. Soit $P \in \mathbb{C}[X]$, de degré n. On note ses racines (répétées avec multiplicité) $z_1, \dots, z_n$ et on les suppose non nulles. Calculer $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{z_i}$ en fonction des coefficients de P.
2. Calculer $\displaystyle\sum_{\omega \in \mathbb{U}_n} \frac{1}{2-\omega}$.

Exercice 65$^+$.

On note cot : $x \mapsto \dfrac{\cos x}{\sin x}$ la fonction cotangente.

1. Montrer l'existence d'un polynôme $P_n \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que $\forall t \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[, P_n(\cot^2 x) = \dfrac{\sin\big((2n+1)x\big)}{\sin^{2n+1} t}$.
2. Déterminer les racines de P_n et calculer leur somme.
3. Montrer que $\forall t \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[, \cot^2 t \leqslant \dfrac{1}{t^2} \leqslant 1 + \cot^2 t$ et en déduire la valeur de $\zeta(2) = \displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$.

Exercice 66$^+$.

Soit $P = X^3 - 11X + 12$.

1. Montrer que P possède trois racines réelles a, b et c tels que $-4 < a < -3$ et $1 < b < 2 < c < 3$.
2. Calculer $S = \arctan(a) + \arctan(b) + \arctan(c)$.

Divisibilité

Autocorrection I.

Montrer par deux méthodes différentes que X^2 divise $(X+1)^n - nX - 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Autocorrection J.

Montrer que $(X^2+1)^2$ divise $3X^{11} - 2X^{10} - 4X^8 - 8X^7 - 2X^6 - 4X^5 + X^3$.

Autocorrection K.

Soit $P, Q \in K[X]$. On suppose que P divise $Q^2 - Q$.

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, P divise $Q^n - Q$.

Exercice 67.
Trouver tous les couples $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$ tels que le polynôme X^2+2 divise $X^4+X^3+\lambda X^2+\mu X+2$.

Exercice 68.
Trouver les $a \in \mathbb{C}$ tels que le polynôme $X^4 - X + a$ soit divisible par $X^2 - aX + 1$.

Exercice 69$^+$.
Soit $\alpha_0, \dots, \alpha_{n-1} \in \mathbb{N}$ des entiers tels que $\forall k \in [\![0, n-1]\!]$, $\alpha_k \equiv k \pmod{n}$.

Montrer que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} X^k$ divise $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} X^{\alpha_k}$.

Exercice 70. ☑
Soit $n \in \mathbb{N}$. Le polynôme $(X+1)^{6n} - X^{6n} - 1$ est-il divisible par $(X^2+X+1)^2$?

Exercice 71.

1. Soit $P \in \mathbb{K}[X]$.
   (a) Pour tout $k \in \mathbb{N}$, montrer que $P - X$ divise $P^k - X^k$.
   (b) En déduire que $P - X$ divise $P \circ P - X$.
2. Déterminer les racines complexes du polynôme $(X^2+3X+1)^2 + 3X^2 + 8X + 4$.

Exercice 72$^+$.
Soit $P, Q \in \mathbb{C}[X]$ et $m \in \mathbb{N}^*$. Montrer que P divise Q si et seulement si $P(X^m)$ divise $Q(X^m)$.

Exercice 73$^+$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère le polynôme complexe $P_n = X^n - 1$. Soit $a, b \geqslant 2$.
1. Montrer que a divise b si et seulement si P_a divise P_b.
2. Montrer que a et b sont premiers entre eux si et seulement si $P_a P_b$ divise $(X-1)P_{ab}$.

Exercice 74. ☑
Déterminer $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré 5 tel que $(X-1)^3$ divise $P+1$ et $(X+1)^3$ divise $P-1$.

Exercice 75.
Déterminer quels polynômes $P \in \mathbb{K}[X]$ sont divisibles par leur dérivée.

Exercice 76.
Dans les trois questions suivantes, on donne deux polynômes $P, Q \in \mathbb{C}[X]$, et on demande de déterminer le reste de P dans la division euclidienne par Q.
(i) $P = X^{100}$ et $Q = (X-1)^3(X+1)$;
(ii) $P = X^{2n}$ et $Q = (X^2+1)^2$;
(iii) $P = (X+1)^{2n+1} - X^{2n+1}$ et $Q = X^2 + X + 1$.

Exercice 77$^+$ (Théorème de De Bruijn).

Soit $a \leqslant b \leqslant c$ et $A \leqslant B \leqslant C$ des entiers $\geqslant 1$. On s'intéresse dans cet exercice à la possibilité de paver un pavé de taille $A \times B \times C$ par des briques de taille $a \times b \times c$. Donnons des définitions précises.

- Une *brique* est une partie de $\mathbb{N}^3$ de la forme $\mathcal{B} = [\![x, x']\!] \times [\![y, y']\!] \times [\![z, z']\!]$.
- La *taille* d'une telle brique sera le triplet de ses trois « dimensions » $x' - x + 1$, $y' - y + 1$, $z' - z + 1$, rangées par ordre croissant. Par exemple, $[\![3, 5]\!] \times [\![1, 6]\!] \times [\![2, 4]\!]$ est une brique de taille $(3, 3, 6)$.
- On se demande si le pavé $P = [\![1, A]\!] \times [\![1, B]\!] \times [\![1, C]\!]$ de taille (A, B, C) peut s'écrire comme union disjointe de briques de taille (a, b, c) : on dira alors pour simplifier que P est (a, b, c)-pavable.

1. Montrer que le pavé de taille $(5, 6, 6)$ n'est pas $(1, 2, 4)$-pavable.

Étant donné une partie finie $E \subseteq \mathbb{N}^3$, on définit son *poids* $w(E) = (X-1)^3 \displaystyle\sum_{(i,j,k) \in E} X^{i+j+k} \in \mathbb{R}[X]$.

2. Calculer le poids $w(P)$ du pavé $P = [\![1, A]\!] \times [\![1, B]\!] \times [\![1, C]\!]$.
3. Montrer que si P est (a, b, c)-pavable, alors $(X^a - 1)(X^b - 1)(X^c - 1) \mid w(P)$.
4. Montrer que le pavé de taille $(10, 10, 10)$ n'est pas $(1, 2, 4)$-pavable
5. Montrer que le pavé de taille $(7, 8, 9)$ n'est pas $(1, 2, 4)$-pavable.
6. Montrer le *théorème de De Bruijn* (1969) : si a divise b et b divise c, alors P est (a, b, c)-pavable si et seulement si, quitte à échanger A, B et C, on a $a \mid A$, $b \mid B$ et $c \mid C$.

Théorème de D'Alembert-Gauss et factorisations

Autocorrection L. ☑

Donner la factorisation dans $\mathbb{C}[X]$, puis dans $\mathbb{R}[X]$, des polynômes suivants :

(i) $X^2 + X + 1$;

(ii) $X^4 - 4$;

(iii) $X^4 + 1$;

(iv) $X^6 + 27$;

(v) $(X^2 - X + 1)^2 + 1$;

(vi) $X^5 - 10X^4 + 25X^3 - 25X^2 + 10X - 1$;

(vii) $X^3 - 8X^2 + 23X - 28$, en sachant que la somme de deux des racines est égale à la troisième ;

(viii) $X^4 + 12X - 5$, en sachant qu'il y a deux racines dont la somme vaut 2.

Exercice 78.

Factoriser les polynômes suivants sur $\mathbb{R}$.

(i) $X^4 + X^2 + 1$;

(ii) $X^4 + X^2 - 6$;

(iii) $X^8 + X^4 + 1$.

Exercice 79.

Soit $a \in]0, \pi[$ et $n \in \mathbb{N}$. Factoriser $X^{2n} - 2\cos(na)X^n + 1$ dans $\mathbb{C}[X]$ puis dans $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 80.

On considère le polynôme $P = (1 - X^2)^3 + 8X^3$.

1. Déterminer les solutions complexes de l'équation $\left(\dfrac{1 - z^2}{2z}\right)^3 = -1$.
2. En déduire la factorisation du polynôme P sur $\mathbb{C}$, puis sur $\mathbb{R}$.

Exercice 81$^+$.
Déterminer tous les polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ tels que $P(X^2) = P(X)\,P(X-1)$.

Exercice 82$^+$.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère le polynôme $P = \sum_{k=0}^{n} X^k$.

1. Factoriser P sur $\mathbb{C}$.
2. En déduire la valeur de $\prod_{k=1}^{n} \sin\left(\frac{k\pi}{n+1}\right)$.

Exercice 83^{++}.
Calculer $\prod_{k=1}^{n} \left(5 - 4\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)\right)$.

Exercice 84$^+$ (Positivstellensatz sur $\mathbb{R}$).

1. Soit $\mathcal{S} = \left\{A^2 + B^2 \,\middle|\, A, B \in \mathbb{R}[X]\right\}$. Montrer que $\mathcal{S}$ est stable par produit.
2. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Montrer l'équivalence $P \in \mathcal{S} \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, P(x) \geqslant 0$.

Exercice 85^{++} (Positivstellensatz sur $\mathbb{R}_+$).
Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Montrer $\left(\forall x \in \mathbb{R}_+, P(x) \geqslant 0\right) \Leftrightarrow \left(\exists A, B \in \mathbb{R}[X] : P = A^2 + X\,B^2\right)$.

Exercice 86$^+$. *X(PC)*
Trouver les polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ tels que P et $P \circ P$ aient exactement les mêmes racines.

Exercice 87$^+$.
Déterminer les $(P, Q) \in \mathbb{C}[X]^2$ tels que $\forall z \in \mathbb{C}, |P(z)| \leqslant |Q(z)|$.