Systèmes linéaires

Calcul pratique

Autocorrection A. ☑

Résoudre les systèmes linéaires suivants.

(i) $\begin{cases} x+y+z=1 \\ x+2y+3z=2 \\ x-y+2z=-1 \end{cases}$

(ii) $\begin{cases} 2x+3y-z=-1 \\ x+2y+3z=2 \\ 3x+4y-5z=-4 \end{cases}$

(iii) $\begin{cases} x+2y-z+3t=2 \\ -2x-4y+2z+t=3 \\ 3x+6y-3z+2t=1 \end{cases}$

(iv) $\begin{cases} 4x+3y=2 \\ 2x+y=5 \\ 3x+2y=2 \end{cases}$

(v) $\begin{cases} x+2y+z+4t=2 \\ y+t=0 \\ 3x+2y+z=3 \\ 4x+4y+6z=6 \end{cases}$

(vi) $\begin{cases} 2x-2y+z+t=-1 \\ \dfrac{3}{2}x+y-3z+\dfrac{t}{2}=2 \\ y+3z=2 \end{cases}$

(vii) $\begin{cases} x+3y+z+3t+4u=2 \\ -x+y-u=5 \\ 3x+2y+t+4u=2 \end{cases}$

(viii) $\begin{cases} u+w=1 \\ v+w=0 \\ u+v=1 \\ 2u+3v=0 \end{cases}$

(ix) $\begin{cases} 2y-z=1 \\ 2x-4y+3z=-1 \\ x+y-3z=-6 \end{cases}$

(x) $\begin{cases} x-2y+z=1 \\ 2x-3y+3z=-2 \\ x+y-2z=1 \end{cases}$

(xi) $\begin{cases} x+y+z+t=2 \\ 2x+y+z+t=1 \\ x+2y+2z=2 \end{cases}$

(xii) $\begin{cases} 9x+15y+18z-6t+3u=3 \\ 2x+y-t+u=5 \\ 3x+5y+6z-2t+u=1 \end{cases}$

Autocorrection B. ☑

Soit $a, b, d, m, p, q, r, s \in \mathbb{R}$ des paramètres. Résoudre les systèmes suivants, en discutant selon les valeurs des paramètres.

(i) $\begin{cases} x+y=s \\ x-y=d \end{cases}$

(ii) $\begin{cases} 3x+y-z=-1 \\ 5x+2y-2z=a \\ 4x+y-z=b \end{cases}$

(iii) $\begin{cases} x+y=1 \\ ax+by=0 \\ a^2x+b^2y=1 \\ a^3x+b^3y=0 \end{cases}$

(iv) $\begin{cases} mx+y+z=1 \\ x+my+z=m \\ x+y+mz=1 \\ x+y+z=m \end{cases}$

(v) $\begin{cases} ax+y+z=1 \\ x+ay+z=1 \\ (2a+1)x+3y+(a+2)z=3 \end{cases}$

(vi) $\begin{cases} x+2y+az=1 \\ 3x+4y+2z=a \\ 2x+3y-z=1 \end{cases}$

(vii) $\begin{cases} x+y+4z+4t=a \\ 3x+y-4z+6t=0 \\ x-4z+t=b \end{cases}$

(viii) $\begin{cases} 2y+2z=p \\ -2x+z=q \\ -2x-y=r \\ x-2y+2z=s \end{cases}$

Exercice 1.

1. L'un des deux systèmes suivants n'a pas de solution. De tête, déterminer lequel.

$$\begin{cases} 2x+3y-z+t=2 \\ 2x+3y+z=4 \\ 2x+3y+2z=3 \\ 2x+3y=5 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x+3y-z+t=2 \\ 2x+3y+z=4 \\ 2x+3y+2z=3 \\ 2x+3y=4 \end{cases}$$

   Résoudre l'autre, de tête aussi...

2. Résoudre de tête : $\begin{cases} x+y+z=-1 \\ x+y-z=2 \\ x-y-z=3 \end{cases}$

Exercice 2.

Pour quelles valeurs de $(a,b)\in\mathbb{C}^2$ le système

$$\begin{cases} ax+by=1 \\ bx+ay=1 \end{cases}$$

a-t-il aucune solution ? une infinité de solutions ? une unique solution ?

Exercice 3.

Pour quelles valeurs de a le système

$$\begin{cases} x+y-z=1 \\ x+2y+az=2 \\ 2x+ay+2z=3 \end{cases}$$

a-t-il aucune solution ? une infinité de solutions ? une unique solution ?

Exercice 4^{++}.

Soit $a\in\mathbb{R}$ et $(b_1,\dots,b_n)\in\mathbb{R}^n$. Résoudre le système

$$\begin{cases} ax_1+x_2+\cdots+x_n=b_1 \\ x_1+ax_2+\cdots+x_n=b_2 \\ \vdots \qquad\qquad\qquad\quad \vdots \\ x_1+x_2+\cdots+ax_n=b_n. \end{cases}$$

Problèmes se ramenant à des systèmes linéaires

Exercice 5.

La tablette VAT 8389, conservée au *Vorderasiatisches Museum* de Berlin, date de la période paléo-babylonienne (première moitié du deuxième millénaire avant notre ère). Elle comporte deux des plus anciens exemples conservés de problèmes se ramenant à des systèmes linéaires. Voici le premier, dans la traduction de François Thureau-Dangin : résolvez-le. (Le *sar* et le *bur* sont deux unités d'aire, un *bur* valant 1800 *sar* ; le *sìla* et le *gur* sont des unités de volume, un *gur* valant 300 *sìla*).

> Par *bur*, j'ai perçu 4 *gur* de grain. Par second *bur*, j'ai perçu 3 *gur* de grain. Un grain excède l'autre de 500 [*sìla*]. J'ai additionné mes champs : 1800 [*sar*]. Que sont mes champs ?

Exercice 6. ☑

De quelle nature sont les deux ensembles

$$P = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, 2x + 3y + z = 1 \right\} \qquad \text{et} \qquad Q = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, x - y + 2z = 3 \right\} ?$$

S'intersectent-ils ? Si oui, décrire leur intersection sous forme paramétrée.

Exercice 7 (Résolution de l'équation du second degré par la résolvante de Lagrange).

Soit S et P deux nombres complexes. Le but de cet exercice est de donner une manière alternative de résoudre l'équation $x^2 - Sx + P = 0$. On note z_1 et z_2 les deux solutions de l'équation (avec la convention usuelle $z_1 = z_2$ dans le cas où l'équation n'a qu'une solution).

1. Calculer $(z_1 - z_2)^2$ en fonction de S et P.
2. Soit δ une racine carrée de $S^2 - 4P$. Exprimer $z_1 \pm z_2$ en fonction de S et δ.
3. Conclure.

Exercice 8. ☑

Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 7 & 1 \end{pmatrix}$. Déterminer les matrices de $M_2(K)$ qui commutent avec A.

Exercice 9.

Soit $a \in \mathbb{R}$. On définit $M_a = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ a & 0 & 1 \\ 0 & a & 1 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que M_a est inversible si et seulement si $a \neq 0$.
2. Déterminer, en fonction de a, le noyau $\ker M_a$ et l'image $\operatorname{im} M_a$.

Exercice 10. 💡

Pour quelles valeurs de $m \in \mathbb{R}$ a-t-on $\begin{pmatrix} 1 \\ m \\ 1 \\ m \end{pmatrix} \in \operatorname{im} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ m & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 \\ 1 & 1 & m \end{pmatrix}$?

Exercice 11.

Soit $a, b, c \in \mathbb{R}$ et $f : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto ae^x + bx + c. \end{cases}$ Pour quelles valeurs de a, b et c a-t-on que le graphe de f contient $(0, 1)$, que sa tangente en ce point contient également $(2, 3)$ et que le graphe admette une tangente horizontale au point d'abscisse $\ln 3$?

Exercice 12$^+$.

Déterminer les triplets $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ (s'ils existent) tels que l'on ait les identités suivantes.

(i) $\forall x \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{U}_3, \dfrac{1}{x^3 - 1} = \dfrac{a}{x - 1} + \dfrac{bx + c}{x^2 + x + 1}$;

(ii) $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0, 2, 3\}, \dfrac{1}{x^3 - 5x^2 + 6x} = \dfrac{a}{x} + \dfrac{b}{x - 2} + \dfrac{c}{x - 3}$;

(iii) $\forall x \in \mathbb{R}_-, \dfrac{x^2 + x + 1}{x - 2} = ax + b + \dfrac{c}{x - 2}$;

(iv) $\forall x \in \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}, \dfrac{1}{x^3 - 2x^2 + x} = \dfrac{a}{x} + \dfrac{b}{x - 1} + \dfrac{c}{(x - 1)^2}$.

Exercice 13.

Résoudre les systèmes suivants (on commencera par préciser dans quel ensemble on cherche les solutions, de telle sorte que toutes les expressions aient un sens).

(i) $\begin{cases} xy = 1 \\ x/y = 2 \end{cases}$ (ii) $\begin{cases} xyz = 1 \\ xy^2z^4 = 2 \\ xy^3z^9 = 3. \end{cases}$

Exercice 14.

Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ telles que $\forall x \in \mathbb{R}^*, f(x) + 2f\left(\frac{1}{x}\right) = x$.

Exercice 15$^+$.

On se donne n points $M_1, M_2, \dots, M_n$ du plan. Peut-on trouver n points $A_1, A_2, \dots, A_n$ tels que M_i soit le milieu du segment $[A_i\, A_{i+1}]$ pour tout $i \in [\![1, n-1]\!]$ et M_n soit le milieu de $[A_n\, A_1]$?

Inversibilité des matrices

Autocorrection C. ☑

Soit $z \in \mathbb{C}$. Déterminer si les matrices suivantes sont inversibles et, le cas échéant, calculer leur inverse.

(i) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$; (iii) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$; (v) $\begin{pmatrix} i & -1 & 2i \\ 2 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$;

(ii) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$; (iv) $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$; (vi) $\begin{pmatrix} 1 & \overline{z} & \overline{z}^2 \\ z & 1 & \overline{z} \\ z^2 & z & 1 \end{pmatrix}$;

(vii) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 0 & 1 & 2 & \cdots & n-1 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & n-2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$; (viii) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ 1 & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 16. ☑

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On définit la *all-ones matrix* $J_n \in M_n(\mathbb{R})$ dont tous les éléments valent 1.

À quelle condition sur n la matrice J_n est-elle inversible ? On donnera (au moins) deux démonstrations.

Exercice 17. ☑

On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

1. Calculer AB, AC. La matrice A est-elle inversible ?
2. Déterminer les matrices $F \in M_3(\mathbb{R})$ telles que $AF = 0$.

Exercice 18.

Soit $A = \begin{pmatrix} x & y & z & t \\ -y & x & -t & z \\ -z & t & x & -y \\ -t & -z & y & x \end{pmatrix} \in M_4(\mathbb{C})$.

Calculer $A^T A$. En déduire une condition nécessaire et suffisante pour que A soit inversible (on en donnera alors l'inverse). Que devient la condition si $A \in M_4(\mathbb{R})$?

Exercice 19$^+$ (Déterminant en dimension 3).

1. Soit $n \geqslant 1$ un entier et $M = \left(\begin{array}{c|ccc} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & N & \\ 0 & & & \end{array}\right) \in M_n(K)$, avec $a_1, a_2, \ldots, a_n \in K$ et une matrice $N \in M_{n-1}(K)$. Montrer que M est inversible si et seulement si $a_1 \neq 0$ et $N \in GL_{n-1}(K)$.
2. Soit $B = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \in M_3(K)$. On suppose $a \neq 0$. Montrer que

$$B \in GL_3(K) \Leftrightarrow aei + bfg + cdh - afh - bdi - ceg \neq 0.$$

Exercice 20$^+$ (Lemme de Hadamard sur les matrices à diagonales dominantes).

Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in M_n(\mathbb{C})$ telle que $\forall i \in [\![1, n]\!], |a_{i,i}| > \sum_{\substack{j \in [\![1,n]\!] \\ j \neq i}} |a_{i,j}|$. Montrer que A est inversible.