Compléments sur les nombres réels

Exercice 2.
Dans chacun des cas, on peut écrire les nombres réels sous la forme $n+\theta$, où $n \in \mathbb{Z}$ et $\theta \in [0,1[$. En utilisant abondamment la propriété

$$\forall t \in \mathbb{R}, \forall m \in \mathbb{Z}, \lfloor t+m \rfloor = \lfloor t \rfloor + m,$$

on se ramène essentiellement au cas de $[0,1[$.

Exercice 11.
Faire un dessin !

Exercice 17.
On n'oubliera pas de montrer que lesdites bornes existent.

Autocorrection

Autocorrection A.
On va montrer que $|a| = 0$, par contraposée.

Supposons par l'absurde que $|a| > 0$. Montrons la négation de l'hypothèse, c'est-à-dire

$$\exists \varepsilon > 0 : |a| > \varepsilon.$$

Candidat : $\varepsilon = \dfrac{|a|}{2}$.

- Comme $|a| > 0$, on a bien $\varepsilon > 0$.
- On obtient l'inégalité $\varepsilon < |a|$ en multipliant par $|a|$ (qui est > 0) l'inégalité $\dfrac{1}{2} < 1$.

Cela conclut la preuve.

Autocorrection B.
On distingue deux cas.

- Supposons $a \in \mathbb{Z}$.

  La partie $[a,b] \cap \mathbb{Z} = [\![a, \lfloor b \rfloor]\!]$ possède alors $\lfloor b \rfloor - a + 1$ éléments.

  Par ailleurs, dans ce cas, $1-a \in \mathbb{Z}$, donc $\lfloor 1-a \rfloor = 1-a$, et on a bien

  $$\lfloor b \rfloor + \lfloor 1-a \rfloor = \lfloor b \rfloor + 1 - a.$$

- Supposons $a \notin \mathbb{Z}$.

  La partie $[a,b] \cap \mathbb{Z} = [\![\lfloor a \rfloor + 1, \lfloor b \rfloor]\!]$ possède alors $\lfloor b \rfloor - (\lfloor a \rfloor + 1) + 1 = \lfloor b \rfloor - \lfloor a \rfloor$ éléments.

  Par ailleurs, dans ce cas, $\lfloor 1-a \rfloor = -\lfloor a \rfloor$: en effet, on a, par définition de la partie entière, l'encadrement $\lfloor a \rfloor < a < \lfloor a \rfloor + 1$, donc $-\lfloor a \rfloor < 1-a < 1-\lfloor a \rfloor$. Ainsi, on a bien

  $$\lfloor b \rfloor + \lfloor 1-a \rfloor = \lfloor b \rfloor - \lfloor a \rfloor.$$

Autocorrection C.

La partie B étant non vide et bornée, elle a une borne inférieure et une borne supérieure. Il en va de même de A.

En particulier, la borne inférieure (resp. supérieure) minorant (resp. majorant) la partie B, on a

$$\forall x \in B, \inf B \leqslant x \leqslant \sup B.$$

Puisque $A \subseteq B$, on a *a fortiori*

$$\forall x \in A, \inf B \leqslant x \leqslant \sup B.$$

On a donc montré que $\inf B$ minorait A. Comme $\inf A$ est le plus grand des minorants de A, on en déduit $\inf B \leqslant \inf A$.

De même, $\sup B$ majore A et $\sup A$ est le plus petit des majorants de A, donc on a $\sup A \leqslant \sup B$.

Autocorrection D.

Les hypothèses entraînent que A et B possèdent des bornes inférieure et supérieure.

1. ▶ Comme la borne supérieure d'une partie en est un majorant, on a

   $$\forall a \in A, a \leqslant \sup(A) \quad \text{et, de même,} \quad \forall b \in B, b \leqslant \sup(B).$$

   Comme $\sup(A)$ et $\sup(B)$ sont $\leqslant \max(\sup(A), \sup(B))$, on en déduit

   $$\forall x \in A \cup B, x \leqslant \max(\sup(A), \sup(B)),$$

   et on a déjà prouvé que $\max(\sup(A), \sup(B))$ majorait $A \cup B$.

   Par définition du maximum, $\max(\sup(A), \sup(B))$ est égal à $\sup(A)$ ou $\sup(B)$. Quitte à échanger A et B, qui jouent des rôles symétriques, on peut supposer $\sup(A) = \max(\sup(A), \sup(B))$.

   ▶ Par ailleurs, on va utiliser l'inclusion claire $\overline{A} \subseteq \overline{A \cup B}$ (et, symétriquement, $\overline{B} \subseteq \overline{A \cup B}$.

   Si $\max(\sup(A), \sup(B)) = \sup(A)$, il s'agit d'un élément de $\overline{A}$. Dans l'autre cas, il s'agit d'un élément de $\overline{B}$.

   Dans tous les cas, il s'agit donc d'un élément de $\overline{A \cup B}$.

   Le maximum $\max(\sup(A), \sup(B))$ est donc un élément de $A \cup B$ qui appartient à son adhérence : c'est sa borne supérieure.

2. Notons que $A \cap B$ est majoré (par tout majorant de A, par exemple) et non vide par hypothèse. Il possède donc une borne supérieure.

   Soit maintenant $x \in A \cap B$.

   Comme $x \in A$, on a $x \leqslant \sup(A)$. De même, comme $x \in B$, on a $x \leqslant \sup(B)$. Cela montre la majoration $\forall x \in A \cap B, x \leqslant \min(\sup(A), \sup(B))$.

   Par passage à la borne supérieure dans les inégalités larges, $\sup(A \cap B) \leqslant \min(\sup(A), \sup(B))$.

3. ▶ Montrons que $-\sup(A)$ est un minorant de A.

   Soit $b \in -A$. Par définition, on peut trouver $a \in A$ tel que $b = -a$.

   Comme $a \in A$, on a $a \leqslant \sup(A)$, donc $b = -a \geqslant -\sup(A)$.

   ▶ Montrons que $-\sup(A)$ appartient à l'adhérence de $-A$.

   Comme $\sup(A)$ appartient à $\overline{A}$, on peut trouver une suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de A telle que $a_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} \sup(A)$. On en déduit $\underbrace{-a_n}_{\in -A} \xrightarrow[n \to +\infty]{} -\sup(A)$, ce qui conclut.

   Ainsi, $-\sup(A) = \inf(-A)$.

4. ► Montrons que $\sup(A)+\lambda$ majore $A+\lambda$.

   Soit $b \in A+\lambda$. On peut trouver $a \in A$ tel que $b = a+\lambda$.

   Comme $a \in A$, on a $a \leqslant \sup(A)$. On en déduit $b \leqslant \sup(A)+\lambda$.

   ► Montrons que $\sup(A)$ appartient à l'adhérence de $A+\lambda$.

   Comme $\sup(A)$ appartient à $\overline{A}$, on peut trouver une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de A telle que $a_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \sup(A)$. On en déduit $\underbrace{a_n+\lambda}_{\in A+\lambda} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \sup(A)+\lambda$, ce qui conclut.

5. ► Montrons que $\sup(A)+\sup(B)$ majore $A+B$.

   Soit $x \in A+B$. On peut trouver $a \in A$ et $b \in B$ tels que $x = a+b$. Comme $a \in A$, on a $a \leqslant \sup(A)$. De même, $b \leqslant \sup(B)$.

   On en déduit $x = a+b \leqslant \sup(A)+\sup(B)$.

   ► Montrons que $\sup(A)+\sup(B)$ appartient à l'adhérence $A+B$.

   Comme $\sup(A)$ appartient à $\overline{A}$, on peut trouver une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de A telle que $a_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \sup(A)$. De même, on peut trouver une suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de B telle que $b_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \sup(B)$.

   On en déduit $\underbrace{a_n+b_n}_{\in A+B} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \sup(A)+\sup(B)$, ce qui conclut.

6. On suppose donc (dans un premier temps) $\lambda > 0$.

   ► Montrons que $\lambda\sup(A)$ majore λA.

   Soit $x \in \lambda A$. On peut trouver $a \in A$ tel que $x = \lambda a$.

   Comme $a \in A$, on a $a \leqslant \sup(A)$.

   En multipliant par $\lambda \geqslant 0$, on en déduit $b = \lambda a \leqslant \lambda\sup(A)$.

   ► Montrons que $\lambda\sup(A)$ appartient à l'adhérence de λA.

   Comme $\sup(A)$ appartient à $\overline{A}$, on peut trouver une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de A telle que $a_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \sup(A)$.

   On en déduit $\underbrace{\lambda a_n}_{\in\lambda A} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \lambda\sup(A)$, ce qui conclut.

   Que se passe-t-il dans les autres cas ?

   ► Si $\lambda = 0$, on a $\lambda A = \{0\}$, donc $\sup(\lambda A) = 0$.

   ► Si $\lambda < 0$, on peut

   - utiliser le cas précédent (ou plutôt son extension naturelle aux bornes inférieures) pour montrer que $\inf(|\lambda|\,A) = |\lambda|\inf A$;
   - puis utiliser la question 3 pour en déduire que

   $$\sup(\lambda A) = -\inf(-\lambda A) = -\inf(|\lambda|\,A) = -|\lambda|\inf A = \lambda\inf A.$$

Autocorrection E.

On notera à chaque fois A la partie de l'énoncé.

(i) ► On a clairement $\forall n \in \mathbb{N}^*, 0 \leqslant \dfrac{1}{n} \leqslant 1$, ce qui montre que A est minoré par 0 et majoré par 1.

► Comme en outre $1 = \dfrac{1}{1} \in A$, on a déjà

$$\max A = \sup A = 1.$$

- Par ailleurs, montrons que 0 est la borne inférieure de A. On a déjà dit que 0 minorait A.

  Pour ce premier exemple, nous allons donner deux preuves, l'une plutôt epsilonesque, et l'autre utilisant la caractérisation séquentielle vue en cours.

  Par les ε. Soit $\varepsilon > 0$. On va montrer que ε ne minore pas A.

  Par le caractère archimédien des réels, on peut trouver un entier $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\frac{1}{n} < \varepsilon$, ce qui exhibe un élément de A qui est $< \varepsilon$ et montre que ε ne minore pas la partie A.

  Le nombre 0 est donc le plus grand des minorants de A, ce qui montre $0 = \inf A$.

  Comme $0 \notin A$, on a $\inf A \notin A$, ce qui montre que A n'a pas de minimum.

  Séquentiellement. Comme la suite $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est clairement à valeurs dans A, et converge vers 0, on a $0 \in \overline{A}$.

  Ainsi, 0 est un minorant de A appartenant à l'adhérence de A. Cela montre $0 = \inf A$.

(ii)
- Comme à la question précédente, on voit clairement que 0 minore A et que 1 majore A.
- Comme $1 \in A$, on a, comme au point précédent,

$$\max A = \sup A = 1.$$

- Contrairement au point précédent, $0 \in A$, donc on a

$$\min A = \inf A = 0.$$

(iii)
- On a déjà vu que $\forall n \in \mathbb{N}^*, 0 \leqslant \frac{1}{n} \leqslant 1$.

  En passant à l'opposé, on a de même l'encadrement $\forall n \in \mathbb{Z} \cap \mathbb{R}_-^*, -1 \leqslant \frac{1}{n} \leqslant 0$.

  En rassemblant ces deux encadrements, on a

$$\forall n \in \mathbb{Z}^*, -1 \leqslant \frac{1}{n} \leqslant 1,$$

  donc -1 minore A et 1 majore A.
- Comme $-1 = \frac{1}{-1} \in A$ et $1 = \frac{1}{1} \in A$, on a

$$\min A = \inf A = -1 \quad \text{et} \quad \max A = \sup A = 1.$$

(iv)
- Montrons que $\inf\,]a, b[\, = a$. Comme $a \notin\,]a, b[$, on en déduira que $]a, b[$ n'a pas de minimum.

  - Il est déjà clair que a minore $]a, b[$.
  - Soit $\varepsilon > 0$. Montrons que $a + \varepsilon$ ne minore pas $]a, b[$.

    Quitte à réduire ε, on peut supposer $\varepsilon \leqslant b - a$. On a alors

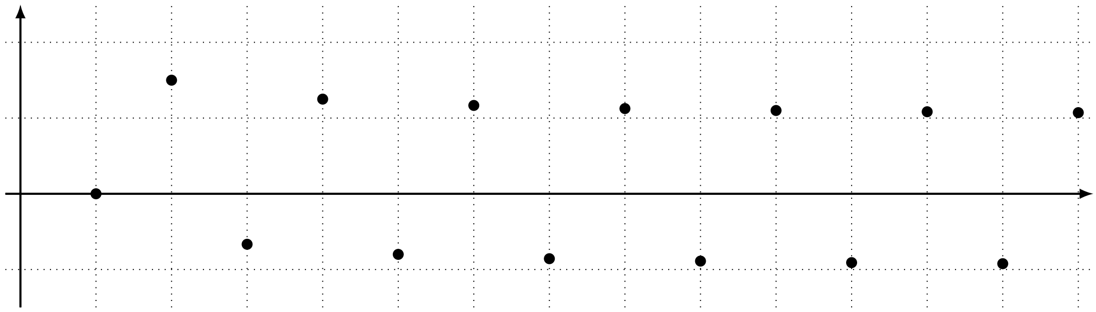
$$a + \frac{\varepsilon}{2} \leqslant a + \varepsilon \qquad \text{et} \qquad a + \frac{\varepsilon}{2} \in\,]a, b[,$$

    ce qui conclut.

    (On peut également donner une preuve séquentielle, mais le fait que la suite $\left(a + \frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ ne soit pas nécessairement à valeurs dans $]a, b[$ complique un peu les choses, et la preuve epsilonesque est ici assez claire...)

- On montre de même que $\sup\,]a, b[= b$, qui n'est pas un maximum.

(v) Un graphique peut aider à y voir plus clair.



On va montrer que

$$\max A = \sup A = \frac{3}{2} \qquad \text{et} \qquad \inf A = -1,$$

- Montrons $\forall n \in \mathbb{N}^*, (-1)^n + \frac{1}{n} \leqslant \frac{3}{2}$.

  Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On distingue deux cas.

  - Si n est impair, on a $(-1)^n = -1$ et $\frac{1}{n} \leqslant 1$, donc

  $$(-1)^n + \frac{1}{n} \leqslant -1 + 1 = 0.$$

  - Si n est pair, il est déjà $\geqslant 2$. On a donc $(-1)^n = 1$ et $\frac{1}{n} \leqslant \frac{1}{2}$, donc

  $$(-1)^n + \frac{1}{n} \leqslant 1 + \frac{1}{2} \leqslant \frac{3}{2}.$$

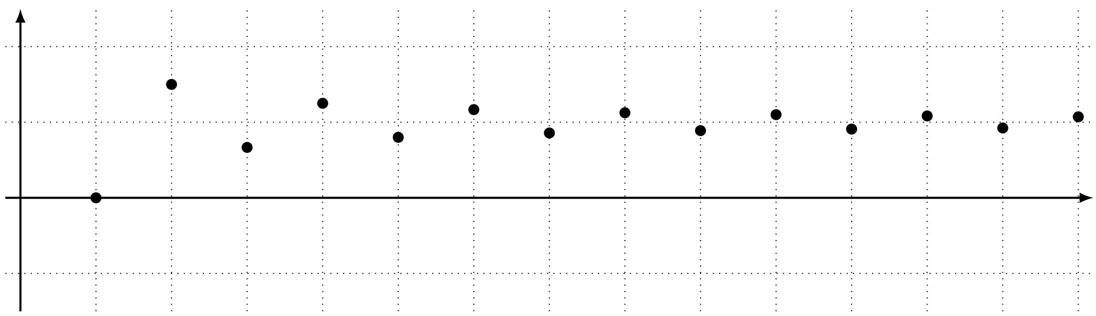
- Comme $\frac{3}{2} = 1 + \frac{1}{2} \in A$, on a déjà montré

$$\max A = \sup A = \frac{3}{2}.$$

- Par ailleurs, quel que soit $n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{n} > 0$, donc $(-1)^n + \frac{1}{n} \geqslant -1 + \frac{1}{n} > -1$. Cela montre déjà que -1 minore A.

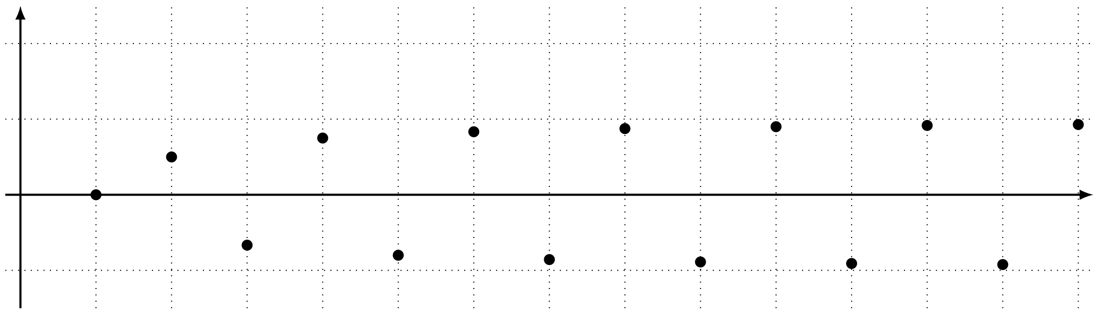
  Pour montrer que $-1 = \inf A$, il suffit alors de remarquer que la suite $\big((-1)^{2n+1} + \frac{1}{2n+1}\big)_{n \in \mathbb{N}} = \left(\frac{1}{2n+1} - 1\right)_{n \in \mathbb{N}}$ est à valeurs dans A et converge vers -1.

(vi)



- On a déjà $1+\dfrac{(-1)^1}{1}=0$ et $1+\dfrac{(-1)^2}{2}=\dfrac{3}{2}$.
- Par ailleurs, pour tout $n \geqslant 3$, on a $\left|\dfrac{(-1)^n}{n}\right| = \dfrac{1}{n} \leqslant \dfrac{1}{3}$, donc $\left|\left(1+\dfrac{(-1)^n}{n}\right)-1\right| \leqslant \dfrac{1}{3}$, donc
$$0 < \frac{2}{3} \leqslant 1+\frac{(-1)^n}{n} \leqslant \frac{4}{3} < \frac{3}{2}.$$
- Cela montre :
  - que $0 \in A$ et que 0 minore A, donc $0 = \min A$;
  - que $\dfrac{3}{2} \in A$ et que $\dfrac{3}{2}$ majore A, donc $\dfrac{3}{2} = \max A$.

(vii)



- On a déjà, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
$$\left|(-1)^n\left(1-\frac{1}{n}\right)\right| = 1-\frac{1}{n} < n,$$
ce qui montre $-1 < (-1)^n\left(1-\dfrac{1}{n}\right)$.
- La suite $\left((-1)^{2n}\left(1-\dfrac{1}{2n}\right)\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est à valeurs dans A et converge vers 1, donc le majorant 1 appartient à A. On en déduit $1 = \sup A$. Comme $1 \notin A$, il ne s'agit pas d'un maximum.
- De même, la suite $\left((-1)^{2n+1}\left(1-\dfrac{1}{2n+1}\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est à valeurs dans A et converge vers -1, donc $-1 = \inf A$, et il ne s'agit pas d'un minimum.

Autocorrection F.

1. Supposons $s - r \geqslant 1$ et montrons que l'entier $\lfloor s \rfloor$ appartient au segment $[r, s]$.
   - On a déjà $\lfloor s \rfloor \leqslant s$.
   - Par ailleurs, $\lfloor s \rfloor \geqslant s - 1 \geqslant r$.

   Cela conclut.
2. Soit $a \in \mathbb{R}$ et $\delta > 0$. On va montrer qu'il existe $x \in D_k$ tel que $|x - a| \leqslant \varepsilon$.

   Comme $\varepsilon > 0$ et $k > 1$, on peut trouver un entier $m \in \mathbb{N}$ tel que $k^m \varepsilon \geqslant 1$. En effet,
   - si $\varepsilon \geqslant 1$, $m = 0$ convient ;
   - si $\varepsilon < 1$, on a $\ln(1/\varepsilon) > 0$; on peut alors appliquer la propriété d'Archimède à $\ln(1/\varepsilon)$ et $\ln(k)$, tous deux > 0 : on trouve ainsi $m \in \mathbb{N}$ tel que
$$m\ln(k) \geqslant \ln\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) \qquad \text{donc} \qquad k^m \geqslant \frac{1}{\varepsilon} \qquad \text{(par croissance de exp)}$$
$$\text{donc} \qquad k^m\,\varepsilon \geqslant 1.$$

On a alors *a fortiori* $k^m 2\varepsilon \geqslant 1$, et la question précédente entraîne que l'on peut trouver un entier $n \in [k^m (a-\varepsilon), k^m (a+\varepsilon)]$, intervalle de taille $k^m 2\varepsilon$.

On a alors $\dfrac{n}{k^m} \in [a-\varepsilon, a+\varepsilon]$, ce qui montre $\exists x \in D_k : |x-a| \leqslant \varepsilon$, et conclut.

3. On a par exemple $D_2 \subseteq \mathbb{Q}$ (ensemble des *nombres dyadiques*) ou $D_{10} \subseteq \mathbb{Q}$ (ensemble des nombres décimaux), donc la densité de ces ensembles entraîne celle de $\mathbb{Q}$.