

Compléments sur les nombres réels

Autocorrection A.

Soit a un réel tel que $\forall \varepsilon > 0, |a| \leq \varepsilon$. Que peut-on dire de a ?

Partie entière

Autocorrection B.

Soit $a \leq b$ deux réels. Montrer que le nombre d'éléments de $[a, b] \cap \mathbb{Z}$ est $\lfloor b \rfloor + \lfloor 1 - a \rfloor$.

Exercice 1.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ un entier qui n'est pas un carré parfait. Montrer que $\lfloor \sqrt{n} \rfloor = \lfloor \sqrt{n-1} \rfloor$.

Exercice 2.

Soit x et y deux réels. Montrer les assertions suivantes.

(i) $\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor \leq \lfloor x + y \rfloor \leq \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 1$.

(ii) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\left\lfloor \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} \right\rfloor = \lfloor x \rfloor$.

(iii) $\lfloor 2x \rfloor = \lfloor x \rfloor + \lfloor x + 1/2 \rfloor$.

Exercice 3⁺.

Montrer $\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}^*, \lfloor x \rfloor + \left\lfloor x + \frac{1}{n} \right\rfloor + \cdots + \left\lfloor x + \frac{n-1}{n} \right\rfloor = \lfloor nx \rfloor$.

Exercice 4.

Étudier la périodicité des fonctions réelles $x \mapsto \lfloor 3x \rfloor - 3x$ et $x \mapsto \frac{x}{2} - \left\lfloor \frac{x+1}{2} \right\rfloor$. Dessiner leurs graphes.

Exercice 5.

Pour $x \in \mathbb{R}$, on note $\{x\} = x - \lfloor x \rfloor$ la partie fractionnaire de x .

Résoudre le système d'équations $\begin{cases} x + \lfloor y \rfloor + \{z\} = 1,1 \\ \lfloor x \rfloor + \{y\} + z = 2,2 \\ \{x\} + y + \lfloor z \rfloor = 3,3. \end{cases}$

Exercice 6⁺⁺.*Putnam*

Montrer $\forall n \in \mathbb{N}^*, \left\lfloor \sqrt{n} + \sqrt{n+1} \right\rfloor = \left\lfloor \sqrt{4n+2} \right\rfloor$.

Bornes supérieure et inférieure

Autocorrection C.

Soit A et B deux parties non vides de \mathbb{R} telles que $A \subseteq B$. On suppose que B est bornée. Montrer que A est bornée et comparer les bornes supérieures et inférieures de A et de B .

Autocorrection D.

Soit A et B deux parties non vides et majorées de \mathbb{R} et $\lambda \in \mathbb{R}$. On définit les ensembles suivants :

$$\begin{aligned} -A &= \{-x \mid x \in A\}, & \lambda A &= \{\lambda x \mid x \in A\}, \\ A + B &= \{x + y \mid (x, y) \in A \times B\}, & A + \lambda &= \{x + \lambda \mid x \in A\}. \end{aligned}$$

1. Montrer que $A \cup B$ est majoré et que l'on a $\sup(A \cup B) = \max(\sup(A), \sup(B))$.
2. On suppose que A et B ne sont pas disjoints. Montrer que $A \cap B$ est majoré et que l'on a l'inégalité $\sup(A \cap B) \leq \min(\sup(A), \sup(B))$. Donner un exemple où cette inégalité est stricte.
3. Montrer que $-A$ est minoré et que l'on a $\inf(-A) = -\sup(A)$.
4. Montrer que $A + \lambda$ est majoré et que l'on a $\sup(A + \lambda) = \sup(A) + \lambda$.
5. Montrer que $A + B$ est majoré et que l'on a $\sup(A + B) = \sup(A) + \sup(B)$.
6. Si $\lambda > 0$, montrer que λA est majoré et que l'on a $\sup(\lambda A) = \lambda \sup(A)$.

Que peut-on dire si $\lambda < 0$ ou $\lambda = 0$?

Autocorrection E.

Déterminer, si elles existent, les bornes des ensembles suivants et préciser s'il s'agit d'un maximum ou d'un minimum.

$$\begin{array}{ll} \text{(i)} \quad \left\{ \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}^* \right\}; & \text{(v)} \quad \left\{ (-1)^n + \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}^* \right\}; \\ \text{(ii)} \quad \left\{ \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}^* \right\} \cup \{0\}; & \text{(vi)} \quad \left\{ 1 + \frac{(-1)^n}{n} \mid n \in \mathbb{N}^* \right\}; \\ \text{(iii)} \quad \left\{ \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \right\}; & \text{(vii)} \quad \left\{ (-1)^n \left(1 - \frac{1}{n} \right) \mid n \in \mathbb{N}^* \right\}. \\ \text{(iv)} \quad]a, b[, \text{ pour deux réels } a < b; & \end{array}$$

Exercice 7.

On pose $E = \left\{ \left| \frac{\cos(n)}{n} \right| \mid n \in \mathbb{N}^* \right\}$. Déterminer $\inf E$ et $\sup E$.

(On pourra admettre $\cos(1) > 1/2$).

Exercice 8.

Soit $E = \left\{ 1 - \frac{1}{n} - \frac{1}{m} \mid n, m \in \mathbb{N}^* \right\}$. Montrer que E est borné et déterminer ses bornes.

Exercice 9.

Déterminer les bornes inférieure et supérieure de $A = \left\{ \frac{mn}{4m^2 + n^2} \mid m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}^* \right\}$.

Exercice 10.

Soit $A = \left\{ \frac{x}{[x][x]} \mid x \in [1, +\infty[\right\}$.

Montrer que A est borné et calculer ses bornes.

Exercice 11.

Soit $a_1 < \dots < a_n$ des réels. Déterminer $\inf \left\{ \sum_{i=1}^n |x - a_i| \mid x \in \mathbb{R} \right\}$.

Exercice 12.

Soit A une partie non vide et majorée de \mathbb{R} .

1. On suppose $\sup A > 0$. Montrer qu'il existe un élément de A strictement positif.
2. On suppose $\sup A \geq 0$. Existe-t-il un élément de A positif?

Exercice 13.

Soit A une partie non vide et minorée de \mathbb{R} .

On note m la borne inférieure de A et on pose $B = A \cap]-\infty, m + 1]$. Déterminer $\inf B$.

Exercice 14.

Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction bornée.

1. Montrer que $\sup_{x \in \mathbb{R}} \sup_{y \in \mathbb{R}} f(x, y) = \sup_{y \in \mathbb{R}} \sup_{x \in \mathbb{R}} f(x, y)$.
2. Comparer $\sup_{x \in \mathbb{R}} \inf_{y \in \mathbb{R}} f(x, y) \leq \inf_{y \in \mathbb{R}} \sup_{x \in \mathbb{R}} f(x, y)$.

Exercice 15.

Soit A et B deux parties non vides de \mathbb{R} .

1. On suppose $\forall x \in A, \forall y \in B, x \leq y$.

Montrer que A est majorée, que B est minorée et que l'on a $\sup A \leq \inf B$.

2. (a) L'hypothèse plus forte $\forall x \in A, \forall y \in B, x < y$ permet-elle de conclure $\sup A < \inf B$?
 (b) Même question avec l'hypothèse $\exists \varepsilon > 0 : \forall x \in A, \forall y \in B, y - x \geq \varepsilon$.

Exercice 16.

Soit $A \subseteq \mathbb{R}$ une partie non vide bornée.

1. Montrer que la borne supérieure $\sup \{ |x - y| \mid (x, y) \in A^2 \}$ est bien définie. On l'appelle *diamètre* de A , et on la note $\text{diam}(A)$.
2. Montrer que $\text{diam } A = \sup A - \inf A$.

Exercice 17.

Soit $A, B \subseteq \mathbb{R}$, non vides, vérifiant $\forall a \in A, \forall b \in B, a \leq b$ et $\forall \varepsilon > 0, \exists (a, b) \in A \times B : b - a \leq \varepsilon$. Montrer que $\sup(A) = \inf(B)$.

Exercice 18.

Soit A une partie non vide de \mathbb{R} et $x \in \mathbb{R}$. On appelle *distance* de x à A le réel

$$d(x, A) = \inf \{ |x - a| \mid a \in A \}.$$

1. Justifier que $d(x, A)$ est bien définie.
2. Montrer $\forall x, y \in \mathbb{R}, |d(x, A) - d(y, A)| \leq |x - y|$.
3. Montrer que $\overline{A} = \{x \in \mathbb{R} \mid d(x, A) = 0\}$.

Exercice 19⁺ (Théorème du point fixe pour les fonctions croissantes).

Soit $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ une fonction croissante. On veut montrer que f possède un point fixe, c'est-à-dire qu'il existe $x \in [0, 1]$ tel que $f(x) = x$. On pose $E = \{x \in [0, 1] \mid f(x) \leq x\}$.

1. Montrer que E possède une borne inférieure m .
2. Montrer que $f(m)$ minore E .
3. Montrer $f[E] \subseteq E$.
4. En déduire que m est un point fixe de f .

Ce résultat est-il toujours vrai si l'on remplace $[0, 1]$ par $[0, 1[$?

Exercice 20⁺.

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction majorée. Construire « la plus petite » fonction croissante $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $f \leq \varphi$ (en expliquant en quel sens elle est la plus petite).

Densité

Autocorrection F.

Soit $k > 1$ un réel. On note

$$D_k = \left\{ \frac{n}{k^m} \mid n \in \mathbb{Z} \text{ et } m \in \mathbb{N} \right\}.$$

1. Montrer que si $r < s$ sont deux réels tels que $s - r > 1$, alors le segment $[r, s]$ contient un entier.
2. En déduire que D_k est dense.
3. Comment le résultat précédent permet-il de redémontrer la densité de \mathbb{Q} ?

Exercice 21⁺.

Soit $E = \{\sqrt{n} - \lfloor \sqrt{n} \rfloor \mid n \in \mathbb{N}\}$.

1. Montrer $\forall n \in \mathbb{N}^*, \sqrt{n+1} - \sqrt{n} \leq \frac{1}{2\sqrt{n}}$.
2. Déterminer $\inf E$ et $\sup E$.
3. Montrer que E est dense dans $[0, 1]$, c'est-à-dire que son adhérence est $[0, 1]$.

Exercice 22⁺.

1. Montrer $\forall n \in \mathbb{N}^*, \ln(n+1) - \ln(n) \leq \frac{1}{n}$.
2. Montrer que $\{\cos(\ln n) \mid n \in \mathbb{N}^*\}$ est dense dans $[-1, 1]$, c'est-à-dire que son adhérence est $[-1, 1]$.

Exercice 23⁺.

Montrer que $\{\sqrt{n} - \sqrt{m} \mid n, m \in \mathbb{N}\}$ est dense.

Exercice 24.

Soit D une partie dense de \mathbb{R} . On pose $E = D \cap \mathbb{R}_+^*$.

Montrer que E est non vide, minoré, et déterminer $\inf E$.

Exercice 25.

Soit $A, B \subseteq \mathbb{R}$ deux parties denses.

1. Montrer que $A + B = \{a + b \mid a \in A, b \in B\}$ est dense.
2. Montrer que $AB = \{ab \mid a \in A, b \in B\}$ est dense.