

Systèmes linéaires

Calcul pratique

Autocorrection A.


Résoudre les systèmes linéaires suivants.

$$(i) \begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + 2y + 3z = 2 \\ x - y + 2z = -1 \end{cases}$$

$$(v) \begin{cases} x + 2y + z + 4t = 2 \\ y + t = 0 \\ 3x + 2y + z = 3 \\ 4x + 4y + 6z = 6 \end{cases}$$

$$(ix) \begin{cases} 2y - z = 1 \\ 2x - 4y + 3z = -1 \\ x + y - 3z = -6 \end{cases}$$

$$(ii) \begin{cases} 2x + 3y - z = -1 \\ x + 2y + 3z = 2 \\ 3x + 4y - 5z = -4 \end{cases}$$

$$(vi) \begin{cases} 2x - 2y + z + t = -1 \\ \frac{3}{2}x + y - 3z + \frac{t}{2} = 2 \\ y + 3z = 2 \end{cases}$$

$$(x) \begin{cases} x - 2y + z = 1 \\ 2x - 3y + 3z = -2 \\ x + y - 2z = 1 \end{cases}$$

$$(iii) \begin{cases} x + 2y - z + 3t = 2 \\ -2x - 4y + 2z + t = 3 \\ 3x + 6y - 3z + 2t = 1 \end{cases}$$

$$(vii) \begin{cases} x + 3y + z + 3t + 4u = 2 \\ -x + y - u = 5 \\ 3x + 2y + t + 4u = 2 \end{cases}$$

$$(xi) \begin{cases} x + y + z + t = 2 \\ 2x + y + z + t = 1 \\ x + 2y + 2z = 2 \end{cases}$$

$$(iv) \begin{cases} 4x + 3y = 2 \\ 2x + y = 5 \\ 3x + 2y = 2 \end{cases}$$

$$(viii) \begin{cases} u + w = 1 \\ v + w = 0 \\ u + v = 1 \\ 2u + 3v = 0 \end{cases}$$

$$(xii) \begin{cases} 9x + 15y + 18z - 6t + 3u = 3 \\ 2x + y - t + u = 5 \\ 3x + 5y + 6z - 2t + u = 1 \end{cases}$$

Autocorrection B.


Soit $a, b, d, m, p, q, r, s \in \mathbb{R}$ des paramètres. Résoudre les systèmes suivants, en discutant selon les valeurs des paramètres.

$$(i) \begin{cases} x + y = s \\ x - y = d \end{cases}$$

$$(v) \begin{cases} ax + y + z = 1 \\ x + ay + z = 1 \\ (2a + 1)x + 3y + (a + 2)z = 3 \end{cases}$$

$$(ii) \begin{cases} 3x + y - z = -1 \\ 5x + 2y - 2z = a \\ 4x + y - z = b \end{cases}$$

$$(vi) \begin{cases} x + 2y + az = 1 \\ 3x + 4y + 2z = a \\ 2x + 3y - z = 1 \end{cases}$$

$$(iii) \begin{cases} x + y = 1 \\ ax + by = 0 \\ a^2x + b^2y = 1 \\ a^3x + b^3y = 0 \end{cases}$$

$$(vii) \begin{cases} x + y + 4z + 4t = a \\ 3x + y - 4z + 6t = 0 \\ x - 4z + t = b \end{cases}$$

$$(iv) \begin{cases} mx + y + z = 1 \\ x + my + z = m \\ x + y + mz = 1 \\ x + y + z = m \end{cases}$$

$$(viii) \begin{cases} 2y + 2z = p \\ -2x + z = q \\ -2x - y = r \\ x - 2y + 2z = s \end{cases}$$

Exercice 1.

1. L'un des deux systèmes suivants n'a pas de solution. De tête, déterminer lequel.

$$\begin{cases} 2x + 3y - z + t = 2 \\ 2x + 3y + z = 4 \\ 2x + 3y + 2z = 3 \\ 2x + 3y = 5 \end{cases} \quad \begin{cases} 2x + 3y - z + t = 2 \\ 2x + 3y + z = 4 \\ 2x + 3y + 2z = 3 \\ 2x + 3y = 4 \end{cases}$$

Résoudre l'autre, de tête aussi...

2. Résoudre de tête :
$$\begin{cases} x + y + z = -1 \\ x + y - z = 2 \\ x - y - z = 3 \end{cases}$$

Exercice 2.

Pour quelles valeurs de $(a, b) \in \mathbb{C}^2$ le système

$$\begin{cases} ax + by = 1 \\ bx + ay = 1 \end{cases}$$

a-t-il aucune solution ? une infinité de solutions ? une unique solution ?

Exercice 3.

Pour quelles valeurs de a le système

$$\begin{cases} x + y - z = 1 \\ x + 2y + az = 2 \\ 2x + ay + 2z = 3 \end{cases}$$

a-t-il aucune solution ? une infinité de solutions ? une unique solution ?

Exercice 4⁺⁺.

Soit $a \in \mathbb{R}$ et $(b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{R}^n$. Résoudre le système

$$\begin{cases} ax_1 + x_2 + \dots + x_n = b_1 \\ x_1 + ax_2 + \dots + x_n = b_2 \\ \vdots \\ x_1 + x_2 + \dots + ax_n = b_n. \end{cases}$$

Problèmes se ramenant à des systèmes linéaires

Exercice 5.

La tablette VAT 8389, conservée au *Vorderasiatisches Museum* de Berlin, date de la période paléobabylonienne (première moitié du deuxième millénaire avant notre ère). Elle comporte deux des plus anciens exemples conservés de problèmes se ramenant à des systèmes linéaires. Voici le premier, dans la traduction de François Thureau-Dangin : résolvez-le. (Le *sar* 𒍪 et le *bur* 𒍪 sont deux unités d'aire, un *bur* valant 1800 *sar* ; le *sila* 𒍪 et le *gur* 𒍪 sont des unités de volume, un *gur* valant 300 *sila*).

Par *bur*, j'ai perçu 4 *gur* de grain. Par second *bur*, j'ai perçu 3 *gur* de grain. Un grain excède l'autre de 500 [*sila*]. J'ai additionné mes champs : 1800 [*sar*]. Que sont mes champs ?

Exercice 6. ☑

De quelle nature sont les deux ensembles

$$P = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid 2x + 3y + z = 1 \right\} \quad \text{et} \quad Q = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x - y + 2z = 3 \right\} ?$$

S'intersectent-ils ? Si oui, décrire leur intersection sous forme paramétrée.

Exercice 7 (Résolution de l'équation du second degré par la résultante de Lagrange). ☑

Soit S et P deux nombres complexes. Le but de cet exercice est de donner une manière alternative de résoudre l'équation $x^2 - Sx + P = 0$. On note z_1 et z_2 les deux solutions de l'équation (avec la convention usuelle $z_1 = z_2$ dans le cas où l'équation n'a qu'une solution).

1. Calculer $(z_1 - z_2)^2$ en fonction de S et P .
2. Soit δ une racine carrée de $S^2 - 4P$. Exprimer $z_1 \pm z_2$ en fonction de S et δ .
3. Conclure.

Exercice 8. ☑

Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 7 & 1 \end{pmatrix}$. Déterminer les matrices de $M_2(\mathbb{K})$ qui commutent avec A .

Exercice 9. ☑

Soit $a \in \mathbb{R}$. On définit $M_a = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ a & 0 & 1 \\ 0 & a & 1 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que M_a est inversible si et seulement si $a \neq 0$.
2. Déterminer, en fonction de a , le noyau $\ker M_a$ et l'image $\text{im } M_a$.

Exercice 10. 💡

Pour quelles valeurs de $m \in \mathbb{R}$ a-t-on $\begin{pmatrix} 1 \\ m \\ 1 \\ m \end{pmatrix} \in \text{im} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ m & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 \\ 1 & 1 & m \end{pmatrix} ?$

Exercice 11⁺. 💡

Soit $A \in M_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathbb{K}^n$. Montrer qu'exactement l'un des cas suivants advient :

- (i) $\exists X \in \mathbb{K}^p : AX = B$;
- (ii) $\exists Y \in \mathbb{K}^n : Y^T A = 0$ et $Y^T B \neq 0$.

Interpréter ce résultat en termes de systèmes linéaires.

Exercice 12⁺. ☑

Déterminer les triplets $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ (s'ils existent) tels que l'on ait les identités suivantes.

- (i) $\forall x \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{U}_3, \frac{1}{x^3 - 1} = \frac{a}{x - 1} + \frac{bx + c}{x^2 + x + 1}$;
- (ii) $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0, 2, 3\}, \frac{1}{x^3 - 5x^2 + 6x} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x - 2} + \frac{c}{x - 3}$;
- (iii) $\forall x \in \mathbb{R}_-, \frac{x^2 + x + 1}{x - 2} = ax + b + \frac{c}{x - 2}$;
- (iv) $\forall x \in \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}, \frac{1}{x^3 - 2x^2 + x} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x - 1} + \frac{c}{(x - 1)^2}$.

Exercice 13.

Soit $a, b, c \in \mathbb{R}$ et $f : \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow & \mathbb{R} \\ x \mapsto & ae^x + bx + c. \end{cases}$ Pour quelles valeurs de a, b et c a-t-on que le graphe de f contient $(0, 1)$, que sa tangente en ce point contient également $(2, 3)$ et que le graphe admette une tangente horizontale au point d'abscisse $\ln 3$?

Exercice 14.

Résoudre les systèmes suivants (on commencera par préciser dans quel ensemble on cherche les solutions, de telle sorte que toutes les expressions aient un sens).

$$(i) \begin{cases} xy = 1 \\ x/y = 2 \end{cases}$$

$$(ii) \begin{cases} xyz = 1 \\ xy^2z^4 = 2 \\ xy^3z^9 = 3. \end{cases}$$

Exercice 15.

Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$ telles que $\forall x \in \mathbb{R}^*, f(x) + 2f\left(\frac{1}{x}\right) = x$.

Inversibilité des matrices

Autocorrection C.

Soit $z \in \mathbb{C}$. Déterminer si les matrices suivantes sont inversibles et, le cas échéant, calculer leur inverse.

$$\blacktriangleright \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix};$$

$$\blacktriangleright \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix};$$

$$\blacktriangleright \begin{pmatrix} i & -1 & 2i \\ 2 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$\blacktriangleright \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix};$$

$$\blacktriangleright \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix};$$

$$\blacktriangleright \begin{pmatrix} 1 & \bar{z} & \bar{z}^2 \\ z & 1 & \bar{z} \\ z^2 & z & 1 \end{pmatrix};$$

$$\blacktriangleright \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ 0 & 1 & 2 & \dots & n-1 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & n-2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix};$$

$$\blacktriangleright \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ 1 & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \dots & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 16.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On définit la *all-ones matrix* $J_n \in M_n(\mathbb{R})$ dont tous les éléments valent 1.

À quelle condition sur n la matrice J_n est-elle inversible ? On donnera (au moins) deux démonstrations.

Exercice 17.

On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

1. Calculer AB, AC . La matrice A est-elle inversible ?
2. Déterminer les matrices $F \in M_3(\mathbb{R})$ telles que $AF = 0$.

Exercice 18.

$$\text{Soit } A = \begin{pmatrix} x & y & z & t \\ -y & x & -t & z \\ -z & t & x & -y \\ -t & -z & y & x \end{pmatrix} \in M_4(\mathbb{C}).$$

Calculer $A^T A$. En déduire une condition nécessaire et suffisante pour que A soit inversible (on en donnera alors l'inverse). Que devient la condition si $A \in M_4(\mathbb{R})$?

Exercice 19⁺ (Déterminant en dimension 3).

1. Soit $n \geq 1$ un entier et $M = \left(\begin{array}{c|ccc} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & N & \\ 0 & & & \end{array} \right) \in M_n(K)$, avec $a_1, a_2, \dots, a_n \in K$ et une matrice

$N \in M_{n-1}(K)$. Montrer que M est inversible si et seulement si $a_1 \neq 0$ et $N \in GL_{n-1}(K)$.

2. Soit $B = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \in M_3(K)$. On suppose $a \neq 0$. Montrer que

$$B \in GL_3(K) \Leftrightarrow aei + bfg + cdh - afh - bdi - ceg \neq 0.$$

Exercice 20⁺ (Lemme de Hadamard sur les matrices à diagonales dominantes).

Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in M_n(\mathbb{C})$ telle que $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, |a_{i,i}| > \sum_{\substack{j \in \llbracket 1, n \rrbracket \\ j \neq i}} |a_{i,j}|$. Montrer que A est inversible.