
Nombres réels

Exercice 1.

Dans chacun des cas, on peut écrire les nombres réels sous la forme $n + \theta$, où $n \in \mathbb{Z}$ et $\theta \in [0, 1[$. En utilisant abondamment la propriété

$$\forall t \in \mathbb{R}, \forall m \in \mathbb{Z}, \lfloor t + m \rfloor = \lfloor t \rfloor + m,$$

on se ramène essentiellement au cas de $[0, 1[$.

Exercice 9.

Faire un dessin !

Autocorrection

Autocorrection A.

On va montrer que $|a| = 0$, par contraposée.

Supposons par l'absurde que $|a| > 0$. Montrons la négation de l'hypothèse, c'est-à-dire

$$\exists \varepsilon > 0 : |a| > \varepsilon.$$

Candidat : $\varepsilon = \frac{|a|}{2}$.

- Comme $|a| > 0$, on a bien $\varepsilon > 0$.
- On obtient l'inégalité $\varepsilon < |a|$ en multipliant par $|a|$ (qui est > 0) l'inégalité $\frac{1}{2} < 1$.

Cela conclut la preuve.

Autocorrection B.

On distingue 2 cas.

- Supposons $a \in \mathbb{Z}$.

La partie $[a, b] \cap \mathbb{Z} = \llbracket a, \lfloor b \rfloor \rrbracket$ a alors $\lfloor b \rfloor - a + 1$ éléments.

Par ailleurs, dans ce cas, $1 - a \in \mathbb{Z}$, donc $\lfloor 1 - a \rfloor = 1 - a$, et on a bien

$$\lfloor b \rfloor + \lfloor 1 - a \rfloor = \lfloor b \rfloor + 1 - a.$$

- Supposons $a \notin \mathbb{Z}$.

La partie $[a, b] \cap \mathbb{Z} = \llbracket \lfloor a \rfloor + 1, \lfloor b \rfloor \rrbracket$ a alors $\lfloor b \rfloor - (\lfloor a \rfloor + 1) + 1 = \lfloor b \rfloor - \lfloor a \rfloor$ éléments.

Par ailleurs, dans ce cas, $\lfloor 1 - a \rfloor = -\lfloor a \rfloor$: en effet, on a, par définition de la partie entière, l'encadrement $\lfloor a \rfloor < a < \lfloor a \rfloor + 1$, donc $-\lfloor a \rfloor < 1 - a < 1 - \lfloor a \rfloor$. Ainsi, on a bien

$$\lfloor b \rfloor + \lfloor 1 - a \rfloor = \lfloor b \rfloor - \lfloor a \rfloor.$$

Autocorrection C.

La partie B étant non vide et bornée, elle a une borne inférieure et une borne supérieure. Il en va de même de A.

En particulier, la borne inférieure (resp. supérieure) minorant (resp. majorant) la partie B, on a

$$\forall x \in B, \inf B \leq x \leq \sup B.$$

Puisque $A \subseteq B$, on a *a fortiori*

$$\forall x \in A, \inf B \leq x \leq \sup B.$$

On a donc montré que $\inf B$ minorait A. Comme $\inf A$ est le plus grand des minorants de A, on en déduit $\inf B \leq \inf A$.

De même, $\sup B$ majore A et $\sup A$ est le plus petit des majorants de A, donc on a $\sup A \leq \sup B$.

Autocorrection D.

On notera à chaque fois A la partie de l'énoncé.

(i) ► On a clairement $\forall n \in \mathbb{N}^*, 0 \leq \frac{1}{n} \leq 1$, ce qui montre que A est minoré par 0 et majoré par 1.

► Comme en outre $1 = \frac{1}{1} \in A$, on a déjà

$$\max A = \sup A = 1.$$

► Par ailleurs, montrons que 0 est la borne inférieure de A. On a déjà dit que 0 minorait A. Pour ce premier exemple, nous allons donner deux preuves, l'une plutôt epsilonlesque, et l'autre utilisant la caractérisation séquentielle vue en cours.

Par les ε . Soit $\varepsilon > 0$. On va montrer que ε ne minore pas A.

Par le caractère archimédien des réels, on peut trouver un entier $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\frac{1}{n} < \varepsilon$, ce qui exhibe un élément de A qui est $< \varepsilon$ et montre que ε ne minore pas la partie A.

Le nombre 0 est donc le plus grand des minorants de A, ce qui montre $0 = \inf A$.

Comme $0 \notin A$, on a $\inf A \notin A$, ce qui montre que A n'a pas de minimum.

Séquentiellement. Comme la suite $\left(\frac{1}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est clairement à valeurs dans A, et converge vers 0, on a $0 \in \overline{A}$.

Ainsi, 0 est un minorant de A appartenant à l'adhérence de A. Cela montre $0 = \inf A$.

(ii) ► Comme à la question précédente, on voit clairement que 0 minore A et que 1 majore A.

► Comme $1 \in A$, on a, comme au point précédent,

$$\max A = \sup A = 1.$$

► Contrairement au point précédent, $0 \in A$, donc on a

$$\min A = \inf A = 0.$$

(iii) ► On a déjà vu que $\forall n \in \mathbb{N}^*, 0 \leq \frac{1}{n} \leq 1$.

En passant à l'opposé, on a de même l'encadrement $\forall n \in \mathbb{Z} \cap \mathbb{R}^*, -1 \leq \frac{1}{n} \leq 0$.

En rassemblant ces deux encadrements, on a

$$\forall n \in \mathbb{Z}^*, -1 \leq \frac{1}{n} \leq 1,$$

donc -1 minore A et 1 majore A.

► Comme $-1 = \frac{1}{-1} \in A$ et $1 = \frac{1}{1} \in A$, on a

$$\min A = \inf A = -1 \quad \text{et} \quad \max A = \sup A = 1.$$

(iv) ► Montrons que $\inf]a, b[= a$. Comme $a \notin]a, b[$, on en déduira que $]a, b[$ n'a pas de minimum.

- Il est déjà clair que a minore $]a, b[$.
- Soit $\varepsilon > 0$. Montrons que $a + \varepsilon$ ne minore pas $]a, b[$.
Quitte à réduire ε , on peut supposer $\varepsilon \leq b - a$. On a alors

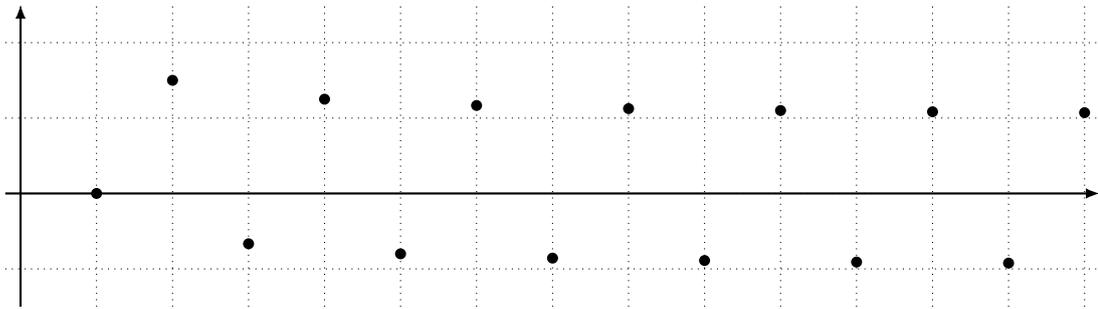
$$a + \frac{\varepsilon}{2} \leq a + \varepsilon \quad \text{et} \quad a + \frac{\varepsilon}{2} \in]a, b[,$$

ce qui conclut.

(On peut également donner une preuve séquentielle, mais le fait que la suite $\left(a + \frac{1}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ ne soit pas nécessairement à valeurs dans $]a, b[$ complique un peu les choses, et la preuve epsilonlesque est ici assez claire...)

► On montre de même que $\sup]a, b[= b$, qui n'est pas un maximum.

(v) Un graphique peut aider à y voir plus clair.



On va montrer que

$$\max A = \sup A = \frac{3}{2} \quad \text{et} \quad \inf A = -1,$$

► Montrons $\forall n \in \mathbb{N}^*, (-1)^n + \frac{1}{n} \leq \frac{3}{2}$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On distingue deux cas.

- Si n est impair, on a $(-1)^n = -1$ et $\frac{1}{n} \leq 1$, donc

$$(-1)^n + \frac{1}{n} \leq -1 + 1 = 0.$$

- Si n est pair, il est déjà ≥ 2 . On a donc $(-1)^n = 1$ et $\frac{1}{n} \leq \frac{1}{2}$, donc

$$(-1)^n + \frac{1}{n} \leq 1 + \frac{1}{2} \leq \frac{3}{2}.$$

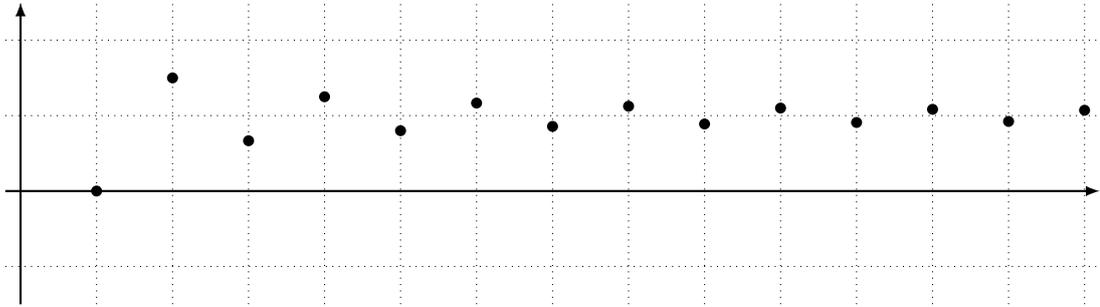
► Comme $\frac{3}{2} = 1 + \frac{1}{2} \in A$, on a déjà montré

$$\max A = \sup A = \frac{3}{2}.$$

- Par ailleurs, quel que soit $n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{n} > 0$, donc $(-1)^n + \frac{1}{n} \geq -1 + \frac{1}{n} > -1$. Cela montre déjà que -1 minore A .

Pour montrer que $-1 = \inf A$, il suffit alors de remarquer que la suite $\left((-1)^{2n+1} + \frac{1}{2n+1}\right)_{n \in \mathbb{N}} = \left(\frac{1}{2n+1} - 1\right)_{n \in \mathbb{N}}$ est à valeurs dans A et converge vers -1 .

(vi)



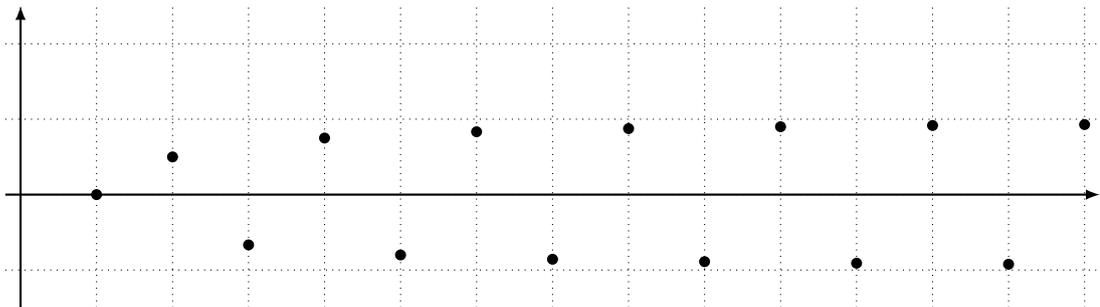
- On a déjà $1 + \frac{(-1)^1}{1} = 0$ et $1 + \frac{(-1)^2}{2} = \frac{3}{2}$.
- Par ailleurs, pour tout $n \geq 3$, on a $\left|\frac{(-1)^n}{n}\right| = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{3}$, donc $\left|1 + \frac{(-1)^n}{n} - 1\right| \leq \frac{1}{3}$, donc

$$0 < \frac{2}{3} \leq 1 + \frac{(-1)^n}{n} \leq \frac{4}{3} < \frac{3}{2}.$$

► Cela montre :

- que $0 \in A$ et que 0 minore A , donc $0 = \min A$;
- que $\frac{3}{2} \in A$ et que $\frac{3}{2}$ majore A , donc $\frac{3}{2} = \max A$.

(vii)



- On a déjà, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\left|(-1)^n \left(1 - \frac{1}{n}\right)\right| = 1 - \frac{1}{n} < 1,$$

ce qui montre $-1 < (-1)^n \left(1 - \frac{1}{n}\right)$.

- La suite $\left((-1)^{2n} \left(1 - \frac{1}{2n}\right)\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est à valeurs dans A et converge vers 1 , donc le majorant 1 appartient à A . On en déduit $1 = \sup A$. Comme $1 \notin A$, il ne s'agit pas d'un maximum.
- De même, la suite $\left((-1)^{2n+1} \left(1 - \frac{1}{2n+1}\right)\right)_{n \in \mathbb{N}}$ est à valeurs dans A et converge vers -1 , donc $-1 = \inf A$, et il ne s'agit pas d'un minimum.

Autocorrection E.

1. Supposons $s - r \geq 1$ et montrons que l'entier $\lfloor s \rfloor$ appartient au segment $[r, s]$.

- ▶ On a déjà $\lfloor s \rfloor \leq s$.
- ▶ Par ailleurs, $\lfloor s \rfloor \geq s - 1 \geq r$.

Cela conclut.

2. Soit $a \in \mathbb{R}$ et $\delta > 0$. On va montrer qu'il existe $x \in D_k$ tel que $|x - a| \leq \varepsilon$.

Comme $\varepsilon > 0$ et $k > 1$, on peut trouver un entier $m \in \mathbb{N}$ tel que $k^m \varepsilon \geq 1$. En effet,

- ▶ si $\varepsilon \geq 1$, $m = 0$ convient ;
- ▶ si $\varepsilon < 1$, on a $\ln(1/\varepsilon) > 0$; on peut alors appliquer la propriété d'Archimède à $\ln(1/\varepsilon)$ et $\ln(k)$, tous deux > 0 : on trouve ainsi $m \in \mathbb{N}$ tel que

$$\begin{aligned} m \ln(k) \geq \ln\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) & \quad \text{donc} \quad k^m \geq \frac{1}{\varepsilon} & \quad (\text{par croissance de exp}) \\ & \quad \text{donc} \quad k^m \varepsilon \geq 1. \end{aligned}$$

On a alors *a fortiori* $k^m 2\varepsilon \geq 1$, et la question précédente entraîne que l'on peut trouver un entier $n \in [k^m(a - \varepsilon), k^m(a + \varepsilon)]$, intervalle de taille $k^m 2\varepsilon$.

On a alors $\frac{n}{k^m} \in [a - \varepsilon, a + \varepsilon]$, ce qui montre $\exists x \in D_k : |x - a| \leq \varepsilon$, et conclut.

3. On a par exemple $D_2 \subseteq \mathbb{Q}$ (ensemble des *nombres dyadiques*) ou $D_{10} \subseteq \mathbb{Q}$ (ensemble des nombres décimaux), donc la densité de ces ensembles entraîne celle de \mathbb{Q} .