Nombres réels

Autocorrection A.

Soit a un réel tel que $\forall \varepsilon > 0, |a| \leqslant \varepsilon$. Que peut-on dire de a ?

Partie entière

Autocorrection B.

Soit $a \leqslant b$ deux réels. Montrer que le nombre d'éléments de $[a, b] \cap \mathbb{Z}$ est $\lfloor b \rfloor + \lfloor 1 - a \rfloor$.

Exercice 1.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ un entier qui n'est pas un carré parfait. Montrer que $\lfloor \sqrt{n} \rfloor = \left\lfloor \sqrt{n-1} \right\rfloor$.

Exercice 2.

Soit x et y deux réels. Montrer les assertions suivantes.

(i) $\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor \leqslant \lfloor x + y \rfloor \leqslant \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 1$.

(ii) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\left\lfloor \dfrac{\lfloor nx \rfloor}{n} \right\rfloor = \lfloor x \rfloor$.

(iii) $\lfloor 2x \rfloor = \lfloor x \rfloor + \lfloor x + 1/2 \rfloor$.

Exercice 3$^+$.

Montrer $\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}^*$, $\lfloor x \rfloor + \left\lfloor x + \dfrac{1}{n} \right\rfloor + \cdots + \left\lfloor x + \dfrac{n-1}{n} \right\rfloor = \lfloor nx \rfloor$.

Exercice 4.

Étudier la périodicité des fonctions réelles $x \mapsto \lfloor 3x \rfloor - 3x$ et $x \mapsto \dfrac{x}{2} - \left\lfloor \dfrac{x+1}{2} \right\rfloor$. Dessiner leurs graphes.

Exercice 5.

Pour $x \in \mathbb{R}$, on note $\{x\} = x - \lfloor x \rfloor$ la partie fractionnaire de x.

Résoudre le système d'équations $\begin{cases} x + \lfloor y \rfloor + \{z\} = 1{,}1 \\ \lfloor x \rfloor + \{y\} + z = 2{,}2 \\ \{x\} + y + \lfloor z \rfloor = 3{,}3. \end{cases}$

Exercice 6^{++}.

Montrer $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\left\lfloor \sqrt{n} + \sqrt{n+1} \right\rfloor = \left\lfloor \sqrt{4n+2} \right\rfloor$.

Bornes supérieure et inférieure

Autocorrection C.

Soit A et B deux parties non vides de $\mathbb{R}$ telles que $A \subseteq B$. On suppose que B est bornée. Montrer que A est bornée et comparer les bornes supérieures et inférieures de A et de B.

Autocorrection D.

Déterminer, si elles existent, les bornes des ensembles suivants et préciser s'il s'agit d'un maximum ou d'un minimum.

(i) $\left\{\frac{1}{n}\,\middle|\, n \in \mathbb{N}^*\right\}$;

(ii) $\left\{\frac{1}{n}\,\middle|\, n \in \mathbb{N}^*\right\} \cup \{0\}$;

(iii) $\left\{\frac{1}{n}\,\middle|\, n \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}\right\}$;

(iv) $]a, b[$, pour deux réels $a < b$;

(v) $\left\{(-1)^n + \frac{1}{n}\,\middle|\, n \in \mathbb{N}^*\right\}$;

(vi) $\left\{1 + \frac{(-1)^n}{n}\,\middle|\, n \in \mathbb{N}^*\right\}$;

(vii) $\left\{(-1)^n\left(1 - \frac{1}{n}\right)\,\middle|\, n \in \mathbb{N}^*\right\}$.

Exercice 7.

On pose $E = \left\{\left|\frac{\cos(n)}{n}\right|\,\middle|\, n \in \mathbb{N}^*\right\}$. Déterminer $\inf E$ et $\sup E$.

(On pourra admettre $\cos(1) > 1/2$).

Exercice 8.

Soit $E = \left\{1 - \frac{1}{n} - \frac{1}{m}\,\middle|\, n, m \in \mathbb{N}^*\right\}$. Montrer que E est borné et déterminer ses bornes.

Exercice 9.

Soit $a_1 < \cdots < a_n$ des réels. Déterminer $\inf\left\{\sum_{i=1}^{n} |x - a_i|\,\middle|\, x \in \mathbb{R}\right\}$.

Exercice 10.

Soit A une partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$.

1. On suppose $\sup A > 0$. Montrer qu'il existe un élément de A strictement positif.
2. On suppose $\sup A \geqslant 0$. Existe-t-il un élément de A positif ?

Exercice 11.

Soit A et B deux parties non vides et majorées de $\mathbb{R}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On définit les ensembles suivants :

$$-A = \{-x \mid x \in A\}, \qquad \lambda A = \{\lambda x \mid x \in A\},$$
$$A + B = \{x + y \mid (x, y) \in A \times B\}, \qquad A + \lambda = \{x + \lambda \mid x \in A\}.$$

1. Montrer que $A \cup B$ est majoré et que l'on a $\sup(A \cup B) = \max(\sup(A), \sup(B))$.
2. On suppose que A et B ne sont pas disjoints. Montrer que $A \cap B$ est majoré et que l'on a l'inégalité $\sup(A \cap B) \leqslant \min(\sup(A), \sup(B))$. Donner un exemple où cette inégalité est stricte.
3. Montrer que $-A$ est minoré et que l'on a $\inf(-A) = -\sup(A)$.
4. Montrer que $A + \lambda$ est majoré et que l'on a $\sup(A + \lambda) = \sup(A) + \lambda$.
5. Montrer que $A + B$ est majoré et que l'on a $\sup(A + B) = \sup(A) + \sup(B)$.
6. Si $\lambda > 0$, montrer que λA est majoré et que l'on a $\sup(\lambda A) = \lambda \sup(A)$. Que peut-on dire si $\lambda < 0$ ou $\lambda = 0$?

Exercice 12.

Soit A une partie non vide et minorée de $\mathbb{R}$.

On note m la borne inférieure de A et on pose $B = A \cap]-\infty, m + 1]$. Déterminer $\inf B$.

Exercice 13. ☑

Soit A et B deux parties non vides de $\mathbb{R}$.

1. On suppose $\forall x \in A, \forall y \in B, x \leqslant y$. Montrer que A est majorée, que B est minorée et que l'on a $\sup A \leqslant \inf B$.
2. (a) L'hypothèse plus forte $\forall x \in A, \forall y \in B, x < y$ permet-elle de conclure $\sup A < \inf B$?
   (b) Même question avec l'hypothèse $\exists \varepsilon > 0 : \forall x \in A, \forall y \in B, y - x \geqslant \varepsilon$.

Exercice 14.

Soit $A \subseteq \mathbb{R}$ une partie non vide bornée.

1. Montrer que la borne supérieure $\sup \left\{ |x-y| \,\middle|\, (x,y) \in A^2 \right\}$ est bien définie. On l'appelle *diamètre* de A, et on la note $\operatorname{diam}(A)$.
2. Montrer que $\operatorname{diam} A = \sup A - \inf A$.

Exercice 15. ☑

Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$ et $x \in \mathbb{R}$. On appelle *distance* de x à A le réel

$$d(x, A) = \inf \left\{ |x-a| \,\middle|\, a \in A \right\}.$$

1. Justifier que $d(x, A)$ est bien définie.
2. Montrer $\forall x, y \in \mathbb{R}, |d(x,A) - d(y,A)| \leqslant |x-y|$.
3. Montrer que $\overline{A} = \left\{ x \in \mathbb{R} \,\middle|\, d(x,A) = 0 \right\}$.

Exercice 16 (Théorème du point fixe pour les fonctions croissantes). ☑

Soit $f : [0,1] \to [0,1]$ une fonction croissante. On veut montrer que f possède un point fixe, c'est-à-dire qu'il existe $x \in [0,1]$ tel que $f(x) = x$. On pose $E = \left\{ x \in [0,1] \,\middle|\, f(x) \leqslant x \right\}$.

1. Montrer que E possède une borne inférieure m.
2. Montrer que $f(m)$ minore E.
3. Montrer $f[E] \subseteq E$.
4. En déduire que m est un point fixe de f.

Ce résultat est-il toujours vrai si l'on remplace $[0,1]$ par $[0,1[$?

Exercice 17$^+$.

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction majorée. Construire « la plus petite » fonction croissante $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $f \leqslant \varphi$ (en expliquant en quel sens elle est la plus petite).

Densité

Autocorrection E. ☑

Soit $k > 1$ un réel. On note

$$D_k = \left\{ \frac{n}{k^m} \,\middle|\, n \in \mathbb{Z} \text{ et } m \in \mathbb{N} \right\}.$$

1. Montrer que si $r < s$ sont deux réels tels que $s - r > 1$, alors le segment $[r, s]$ contient un entier.
2. En déduire que D_k est dense.
3. Comment le résultat précédent permet-il de redémontrer la densité de $\mathbb{Q}$?

Exercice 18$^+$.

Soit $E = \left\{ \sqrt{n} - \lfloor \sqrt{n} \rfloor \,\middle|\, n \in \mathbb{N} \right\}$.

1. Montrer $\forall n \in \mathbb{N}^*, \sqrt{n+1} - \sqrt{n} \leqslant \dfrac{1}{2\sqrt{n}}$.
2. Déterminer $\inf E$ et $\sup E$.
3. Montrer que E est dense dans $[0, 1]$, c'est-à-dire que son adhérence est $[0, 1]$.

Exercice 19$^+$.

1. Montrer $\forall n \in \mathbb{N}^*, \ln(n+1) - \ln(n) \leqslant \dfrac{1}{n}$.
2. Montrer que $\{\cos(\ln n) \mid n \in \mathbb{N}^*\}$ est dense dans $[-1, 1]$, c'est-à-dire que son adhérence est $[-1, 1]$.

Exercice 20$^+$.

Montrer que $\left\{ \sqrt{n} - \sqrt{m} \,\middle|\, n, m \in \mathbb{N} \right\}$ est dense.

Exercice 21.

Soit $A, B \subseteq \mathbb{R}$ deux parties denses.

1. Montrer que $A + B = \{a + b \mid a \in A, b \in B\}$ est dense.
2. Montrer que $AB = \{ab \mid a \in A, b \in B\}$ est dense.