Suites II

Analyse asymptotique

Autocorrection A.

Soit $(u_n)_n$ une suite réelle. Écrire les assertions suivantes sous des formes plus simples.

(i) $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{2n} + \dfrac{1}{12n^2}$;

(ii) $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{n^2+2n+3}{3n^3-n}$;

(iii) $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{n+n^2}{\ln n - n^3}$;

(iv) $u_n = \left(1 + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\dfrac{1}{n}\right)\right)\left(\dfrac{1}{n^3} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\dfrac{1}{n^{10}}\right)\right)$;

(v) $u_n = \underset{n\to+\infty}{o}\left(\dfrac{1}{n^2}\right) + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\dfrac{1}{n}\right) - \underset{n\to+\infty}{o}\left(\dfrac{1}{\ln n}\right)$;

(vi) $u_n = \underset{n\to+\infty}{o}(n) - \underset{n\to+\infty}{o}(n)$;

(vii) $u_n = \underset{n\to+\infty}{o}(n) - \underset{n\to+\infty}{O}(n)$;

(viii) $u_n = (1 + \underset{n\to+\infty}{o}(1))v_n$.

Autocorrection B.

Soit $(u_n)_n$ une suite réelle. Classer les assertions suivantes de la plus forte (c'est-à-dire la plus contraignante) à la plus faible. Il peut y avoir des *ex-æquo*.

(i) $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$;

(ii) $u_n = \exp\left(\underset{n\to+\infty}{o}(1)\right)$;

(iii) $u_n = \underset{n\to+\infty}{O}(n)$;

(iv) $u_n = 1 + \underset{n\to+\infty}{o}(1)$;

(v) $u_n = 1 + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\dfrac{1}{n}\right)$;

(vi) $u_n = \underset{n\to+\infty}{o}(n)$;

(vii) $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} 1$;

(viii) $u_n = 1 + \underset{n\to+\infty}{O}\left(\dfrac{1}{n}\right)$;

(ix) $u_n = \underset{n\to+\infty}{O}(1)$;

(x) $u_n = 1 + \underset{n\to+\infty}{O}(1)$.

Autocorrection C.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}} \in (\mathbb{R}_+^*)^{\mathbb{N}}$ telles que $w_n \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$.

Montrer que $v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n$.

Autocorrection D.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Y a-t-il une implication logique entre les assertions $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$ et $u_n = v_n + \underset{n\to+\infty}{o}(1)$?

Autocorrection E.

Donner un équivalent simple des suites dont les termes généraux sont les suivants.

(i) $\dfrac{3n^4-2n^2+1}{2n^3+1}$;

(ii) $\dfrac{\ln n+n+1}{3n^2+2n+1}$;

(iii) $\ln\left(1+\dfrac{1}{n^2+1}\right)$;

(iv) $\ln\left(\dfrac{n+1}{n}\right)$;

(v) $\sin\sin\dfrac{\pi}{n^2}$;

(vi) $\dfrac{n^2\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\tan\frac{\pi}{n}}$;

(vii) $\ln(n+2)-\ln(n+1)$;

(viii) $(2n+\ln n^2)e^{-(n+1)}$;

(ix) $\dfrac{\ln(n^2+1)}{n+1}$;

(x) $\dfrac{\sqrt{n^2+n+1}}{\sqrt[3]{n^2-n+1}}$;

(xi) $\dfrac{n^3-\sqrt{n^2+1}}{5(\ln n)^3-2n^2}$;

(xii) $\dfrac{n!+e^n}{2^n+3^n}$;

(xiii) $\dfrac{1}{n+1}-\dfrac{1}{n-1}$;

(xiv) $\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}$;

(xv) $\sqrt{\ln(n+1)-\ln(n-1)}$.

Exercice 1.

Classer les suites par ordre de négligeabilité les suites dont les termes généraux sont les suivants.

(i) $\dfrac{1}{n}, \dfrac{1}{n^2}, \dfrac{\ln n}{n}, \dfrac{\ln n}{n^2}, \dfrac{1}{\ln n}, \dfrac{1}{n\ln n}$.

(ii) $n, n^2, n\ln n, \sqrt{n}\ln n, \dfrac{n}{\ln n}, \dfrac{n^2}{\ln n}$.

Exercice 2.

Déterminer un équivalent des suites dont les termes généraux sont les suivants.

(i) $2\sqrt{n}-\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}$;

(ii) $\sqrt[n+1]{n+1}-\sqrt[n]{n}$.

Exercice 3.

Déterminer un équivalent de $\left(\displaystyle\prod_{k=n^2+1}^{n^2+n}\frac{2k-1}{k}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Exercice 4.

Déterminer les limites des suites dont les termes généraux sont les suivants.

(i) $n\sqrt{\ln\left(1+\dfrac{1}{n^2+1}\right)}$;

(ii) $\left(1+\sin\dfrac{1}{n}\right)^n$;

(iii) $\left(n\sin\dfrac{1}{n}\right)^{n^2}$;

(iv) $\dfrac{n^{\sqrt{n+1}}}{(n+1)^{\sqrt{n}}}$;

(v) $n^2\left((n+1)^{1/n}-n^{1/n}\right)$;

(vi) $\left(3\sqrt[n]{2}-2\sqrt[n]{3}\right)^n$.

Exercice 5.

Pour $n\in\mathbb{N}^*$, on définit $u_n=\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$.

1. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge et déterminer sa limite.
2. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante à partir d'un certain rang, par exemple en étudiant le quotient de deux termes successifs.

Exercice 6.

1. Montrer que toute suite équivalente à $(2^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante à partir d'un certain rang.
2. Construire une suite équivalente à $(n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui ne soit pas croissante à partir d'un certain rang. Même question pour $(n^2)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 7.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$.

1. Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $\frac{1}{\sqrt{n+1}} \leqslant 2(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) \leqslant \frac{1}{\sqrt{n}}$.
2. En déduire la limite de $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, puis déterminer un équivalent simple de $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Exercice 8.

Montrer que $\sum_{k=0}^{n} k! \underset{n\to+\infty}{\sim} n!$.

Exercice 9.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles divergeant vers $+\infty$.

On suppose $u_n = \underset{n\to+\infty}{o}(v_n)$.

Montrer qu'il existe une suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $u_n = \underset{n\to+\infty}{o}(w_n)$ et $w_n = \underset{n\to+\infty}{o}(v_n)$.

Exercice 10.

Montrer qu'il existe deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que $u_n = \underset{n\to+\infty}{O}(v_n)$ sans que $v_n = \underset{n\to+\infty}{O}(u_n)$ ou $u_n = \underset{n\to+\infty}{o}(v_n)$.

Exercice 11.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites ne s'annulant pas à partir d'un certain rang.

Déterminer, en justifiant, si chacune des assertions suivantes est vraie ou fausse.

(i) Si $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$, alors $e^{u_n} \underset{n\to+\infty}{\sim} e^{v_n}$.

(ii) $e^{u_n} \underset{n\to+\infty}{\sim} e^{v_n}$ si et seulement si $u_n - v_n = \underset{n\to+\infty}{o}(1)$

(iii) Si $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$ et $u_n > 0$ à partir d'un certain rang, alors $\ln(u_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(v_n)$.

(iv) Si $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$ et $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$, alors $\ln(u_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(v_n)$.

Exercice 12.

Soit u une suite décroissante telle que $u_n + u_{n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$. Déterminer un équivalent simple de u.

Exercice 13$^+$.

Soit $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ une suite telle que $u_n = \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right)$. Montrer $\sum_{k=n+1}^{2n} u_k \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

Études de suites récurrentes et implicites

Suites récurrentes

Autocorrection F.

Étudier la nature de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n + \dfrac{1}{u_n^2}$.

Autocorrection G.

Étudier la nature de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = -\dfrac{1}{2}$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n + u_n^2$.

Exercice 14.

Étudier la nature de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = \dfrac{1}{2}$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \dfrac{u_n^2 + u_n}{2}$.

Exercice 15 (Méthode de Héron).

Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite définie par $u_0 > 0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(u_n + \dfrac{a}{u_n}\right)$.

1. Étudier la fonction $f : \begin{cases} \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{1}{2}\left(x + \dfrac{a}{x}\right) \end{cases}$. Montrer que pour tout $x \geqslant \sqrt{a}$, on a $f(x) \leqslant x$.
2. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \geqslant \sqrt{a}$ et que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante.
3. En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et déterminer sa limite.

Exercice 16.

On considère les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant la relation de récurrence $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = e\ln(u_n)$.

1. Étudier la nature de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans le cas où $u_0 \geqslant e$.
2. Que dire si $u_0 < e$?

Exercice 17.

Soit $f : \begin{cases}]-\infty, 2] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \sqrt{2-x} \end{cases}$.

On considère une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 \in]-\infty, 2]$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. Pour quelles valeurs de u_0 la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle bien définie ?
2. On suppose que u_0 a une telle valeur.
   Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et déterminer sa limite.

Exercice 18.

Étudier la nature de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 1 + \dfrac{2}{u_n}$.

Couples de suites

Exercice 19 (Moyenne arithmético-géométrique).

Soit $a > b \in \mathbb{R}_+^*$. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites définies par $u_0 = a$, $v_0 = b$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2}$ et $v_{n+1} = \sqrt{u_n v_n}$. Montrer que ces deux suites sont bien définies et qu'elles sont adjacentes.

(La limite commune de ces deux suites est, par définition, la *moyenne arithmético-géométrique* des deux nombres a et b.)

Exercice 20.

Soit $x > 1$. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites définies par $u_0 = x$, $v_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2}$ et $v_{n+1} = \dfrac{2u_n v_n}{u_n + v_n}$. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont bien définies, qu'elles sont adjacentes et calculer leur limite commune.

Suites implicites

Exercice 21.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ l'équation $x^n + x^{n-1} + \cdots + x = 1$ possède une unique solution dans $\mathbb{R}_+$. On la note x_n.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $1/2 \leqslant x_n \leqslant 1$.
3. Montrer que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante.
4. Montrer que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente et déterminer sa limite.

Exercice 22.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, soit $f_n : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x^5 + nx - 1. \end{cases}$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un unique réel u_n tel que $f_n(u_n) = 0$.
2. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ ainsi définie est décroissante.
3. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge, puis que sa limite est 0.

Asymptotique

Exercice 23.

Soit $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telle que $u_0 > 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \arctan(u_n)$.

1. Montrer que u est à valeurs > 0 et converge vers 0.
2. Montrer que $u_{n+1} - u_n \underset{n\to\infty}{\sim} -\dfrac{u_n^3}{3}$, et obtenir un équivalent de u.

Exercice 24. *X*

Soit $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ définie par $u_0 > 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n + \dfrac{1}{u_n}$. En donner un équivalent.

Exercice 25$^+$. *Mines*

On définit la suite $x \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ par $x_0 > 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, x_{n+1} = x_n + \dfrac{1}{\ln x_n}$. En déterminer un équivalent.

Exercice 26.

1. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme unitaire, de degré 3, possédant trois racines distinctes a, b et c. Exprimer les coefficients de P en fonction de a, b et c.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $P_n = X^3 - (n+2)X^2 + (2n+1)X - 1 \in \mathbb{R}[X]$.

2. Montrer que, pour n assez grand, P_n possède trois racines a_n, b_n et c_n vérifiant
$$0 < a_n < 1 < b_n < 3 < \frac{2n+1}{3} < c_n.$$
3. Déterminer des équivalents simples des suites a, b et c ainsi définies.

Exercice 27. ☑

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, soit $f_n : x \mapsto x^5 + nx - 1$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un unique réel u_n tel que $f_n(u_n) = 0$, et que $u_n \in \left[0, \frac{1}{n}\right]$.
2. Montrer que $u_n \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{1}{n}$.
3. Donner un équivalent simple de $\left(\frac{1}{n} - u_n\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Exercice 28. ☑

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un unique nombre réel x_n tel que $x_n + \sqrt[3]{x_n} = n$.
2. Déterminer la limite, puis un équivalent simple de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

3^+. Donner un développement asymptotique à trois termes de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 29.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation $x + \ln x = n$ possède une unique solution dans $\mathbb{R}_+^*$, que l'on notera u_n.
2. Déterminer la limite, puis un équivalent simple de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

3^+. Obtenir le développement asymptotique $u_n = n - \ln n + \frac{\ln(n)}{n} + \underset{n\to\infty}{o}\left(\frac{\ln(n)}{n}\right)$.

Exercice 30^{++}.

1. Montrer qu'il existe un unique $x_n \in \left]n\pi - \frac{\pi}{2}, n\pi + \frac{\pi}{2}\right[$ tel que $\tan(x_n) = \sqrt{x_n}$.
2. Déterminer la limite, puis un équivalent simple de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
3. Obtenir un développement asymptotique à quatre termes de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.