Suites

Généralités

Autocorrection A.

Exprimer en fonction de n le terme général des suites $(u_n)_{n\geqslant 0}$ ou $(u_n)_{n>0}$ suivantes.

(i) $u_1 = 7$ et $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ u_{k+1} = -2u_k$;

(ii) $u_1 = 3$ et $\forall n \geqslant 2,\ 2u_n = u_{n-1}$;

(iii) $u_0 = 10$ et $\forall p \in \mathbb{N},\ u_{p+1} - u_p = 3$;

(iv) $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \dfrac{u_{n-1}}{3} + 4$;

(v) $u_0 = 0$ et $\forall i \geqslant 0,\ 4u_{i+1} + 1 = u_i$;

(vi) $u_0 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \dfrac{-1}{2}u_n^2$;

(vii) $u_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = u_{n-1} + n$;

(viii) $u_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_{n+1} = \dfrac{u_n}{u_n + 1}$;

(ix) $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 2u_n^2$.

Exercice 1.

Étudier les variations de la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ ou $(u_n)_{n>0}$ définie par les expressions suivantes.

(i) $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \dbinom{n}{p}$ (pour un certain $p \in \mathbb{N}$) ;

(ii) $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} + \frac{1}{n}$;

(iii) $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \dfrac{n!}{2^n}$;

(iv) $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \ln k - n \ln n$;

(v) $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \displaystyle\prod_{k=1}^{n} \frac{2k}{2k+1}$;

(vi) $u_0 > 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \dfrac{3u_n^2}{1 + 4u_n}$.

Exercice 2^{++}.

1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle non bornée et $C > 0$. Montrer que $\exists p, q \in \mathbb{N} : |u_p - u_q| > C$.
2. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles non bornées et $C > 0$. Montrer que
$$\exists p, q \in \mathbb{N} : |u_p - u_q| > C \text{ et } |v_p - v_q| > C.$$
3. Montrer que le résultat correspondant pour trois suites est faux.

Récurrences linéaires

Autocorrection B.

Dans chacun des cas suivants, déterminer l'expression générale de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par ses premiers termes et une relation de récurrence.

(i) $u_0 = 1$, $u_1 = 1$, $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = 2u_{n+1} + 3u_n$.

(ii) $u_0 = 1$, $u_1 = 6$, $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = 4u_{n+1} - 4u_n$.

(iii) $u_0 = 0$, $u_1 = 0$, $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = \sqrt{2}u_{n+1} + \dfrac{2}{3}u_n$.

(iv) $u_0 = 2$, $u_1 = 1$, $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} - 2u_{n+1} + 2u_n = 0$.

(v) $u_0 = 2$, $u_1 = 1$, $\forall k \in \mathbb{N},\ u_{k+2} - 2u_{k+1} + u_k = 0$;

(vi) $u_0 = 1$, $u_1 = 1$, $\forall n \in \mathbb{N},\ 2u_{n+2} + u_{n+1} - u_n = 0$;

(vii) $u_0 = 1$, $u_1 = 2$, $\forall m \in \mathbb{N}^*,\ u_{m+1} = u_m + 3u_{m-1}$.

Exercice 3.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite réelle définie par $u_0 = 1$ et $\forall n \geqslant 0,\ u_{n+1} = 2u_n + n$.

1. Montrer qu'il existe une suite arithmétique $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant la même relation de récurrence que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
2. En étudiant la suite $(u_n - v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, déterminer l'expression de u_n en fonction de n.

Exercice 4.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite telle que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 2u_n + 5^n$.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $v_n = u_n/5^n$. Montrer que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est arithmético-géométrique ; en déduire l'expression de son terme général.
2. En déduire l'expression du terme général de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 5.

Soient $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ les deux suites réelles définies par

$$\begin{cases} a_0 = 2 \\ b_0 = -1 \end{cases} \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} a_{n+1} = 3a_n + b_n \\ b_{n+1} = 2a_n + 4b_n. \end{cases}$$

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = a_n + b_n$ et $v_n = 2a_n - b_n$. Calculer les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
2. En déduire l'expression de a_n et b_n en fonction de n.

Exercice 6.

On considère les deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ v_0 = -2 \end{cases} \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} u_{n+1} = 2u_n - v_n \\ v_{n+1} = u_n + 4v_n. \end{cases}$$

1. Montrer que la suite $(u_n + v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique ; en déduire l'expression de son terme général.
2. En déduire une relation de récurrence satisfaite par la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
3. Déterminer l'expression du terme général des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 7.

1. Déterminer toutes les suites réelles bornées $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} + u_{n+1} - 2u_n = 0.$$

2. Déterminer toutes les suites réelles bornées $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que

$$\forall n \in \mathbb{N}, v_{n+2} - 5v_{n+1} + 6v_n = 12\,(-1)^n.$$

Exercice 8$^+$.

Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ telles que $\forall x \in \mathbb{R}_+, f(f(x)) = 6x - f(x)$ et $\forall x > 0, f(x) > 0$.

Exercice 9^{++} (Nombres de Pisot-Vijayaraghavan).

1. Soit $\alpha = \dfrac{3+\sqrt{17}}{2}$.
   (a) Montrer que la suite $(\lfloor \alpha^n \rfloor)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie, à partir d'un certain rang, une relation de récurrence linéaire d'ordre 2 à coefficients entiers.
   (b) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\lfloor \alpha^n \rfloor$ est de même parité que n.
2. Soit $\beta = 3 + \sqrt{5}$. Écrire un programme permettant de calculer rapidement les trois derniers chiffres avant la virgule de β^n, pour de très grandes valeurs de n. (Pour fixer les idées, disons que les calculs devraient par exemple rester faisables pour l'ordinateur avec $n \approx 10^{1\,000\,000}$).
3. Après avoir identifié la propriété des réels α et β utilisée dans les deux exercices précédents, en inventer un analogue, mettant en jeu un troisième nombre réel γ bien choisi.

Convergence

Calculs et opérations

Autocorrection C.
Étudier la convergence des suites $(u_n)_n$ dont les termes généraux sont les suivants.

(i) $\dfrac{\cos n}{n+1}$;

(ii) $\dfrac{n+(-1)^n}{n^2+1}$;

(iii) $\dfrac{(-1)^n+n}{(-1)^n+2}$;

(iv) $\dfrac{e^n+n^2}{n^4+1}$;

(v) $\dfrac{\ln n+1}{n+4}$;

(vi) $\dfrac{3^n+(-2)^n}{3^n-(-2)^n}$;

(vii) $\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}$;

(viii) $\sqrt{n^2+n}-\sqrt{n^2-n}$;

(ix) $\dfrac{\lfloor\sqrt{n}\rfloor}{n}$;

(x) $\dfrac{n!}{n^n}$.

Autocorrection D.

1. Peut-on déterminer la nature (convergente ou divergente) de la somme de deux suites si l'on connaît la nature des deux suites ?

   On traitera tous les cas, en fournissant suivant les cas une preuve ou un contre-exemple.
2. Même question pour le produit.

Autocorrection E.
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles convergentes.

Montrer que $\big(\min(u_n, v_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\big(\max(u_n, v_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent.

Exercice 10.
Soit $x \in \mathbb{R}$. Que vaut $\lim\limits_{n\to\infty} \lim\limits_{m\to\infty} \cos(2\pi n!x)^{2m}$?

Exercice 11.
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite convergente. Que peut-on dire de la suite $(\lfloor u_n \rfloor)_{n\in\mathbb{N}}$?

Exercice 12.

Soit $\ell \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$. Construire deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tendant vers 1 et $+\infty$, respectivement, telles que $u_n^{v_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$.

Exercice 13.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle telle que $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$. Montrer qu'il existe une suite réelle $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que

$$v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \qquad \text{et} \qquad u_n v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty.$$

Autres théorèmes de convergence

Exercice 14 (Définition de $\zeta(2)$).

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$.

1. Étudier la monotonie de $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
2. Montrer que pour tout $n \geqslant 2$, $\dfrac{1}{n^2} \leqslant \dfrac{1}{n-1} - \dfrac{1}{n}$.
3. En déduire que $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente.

Exercice 15.

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{3^k}$ et $T_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{k}{3^k}$.

1. Montrer que la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite que l'on précisera.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $T_{n+1} = \dfrac{T_n + S_n}{3}$.
3. En déduire que $(T_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente et déterminer sa limite.

Exercice 16.

Montrer que la suite de terme général $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^{-1}$ est convergente et préciser sa limite.

Exercice 17.

Soit $p \in \mathbb{N}$. Déterminer la nature de la suite $\left(\dfrac{1! + 2! + \cdots + n!}{(n+p)!}\right)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 18.

Étudier la convergence des trois suites $(u_n)_{n\geqslant 1}$ dont les termes généraux sont les suivants.

(i) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+k}$; (ii) $\displaystyle\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} \lfloor kx \rfloor$; (iii) $\displaystyle\frac{1}{n!}\sum_{k=1}^{n} k!$.

Exercice 19.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans $[0,1]$ telles que $u_n\, v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$. Qu'en dire ?

Exercice 20$^+$.

Soit $(u_n)_n$ une suite réelle telle que $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Montrer que $u_n^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

Exercice 21⁺ (Irrationalité de e).
On définit les suites

$$(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*} = \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\right)_{n\in\mathbb{N}^*} \qquad \text{et} \qquad (v_n)_{n\in\mathbb{N}^*} = \left(u_n + \frac{1}{n\,n!}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}.$$

1. Montrer qu'il s'agit de deux suites adjacentes.
2. On admet que la limite de ces deux suites est e. En déduire que e est irrationnel.

Exercice 22.
Montrer que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définies ci-dessous par leurs termes généraux sont adjacentes.

(i) $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+n}$ et $v_n = \displaystyle\sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k}$;

(ii) $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n}$ et $v_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n+1}$

Exercice 23 (Critère spécial des séries alternées).
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante de limite nulle. Montrer que $\displaystyle\left(\sum_{k=0}^{n}(-1)^k u_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

Exercice 24⁺.
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite réelle et $(C_n)_{n\in\mathbb{N}^*} = \displaystyle\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u_k\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

1. Montrer que si $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$, alors $C_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$. La réciproque est-elle vraie ?
2. Montrer que si $(u_n)_n$ est monotone et que $(C_n)_n$ converge, alors $(u_n)_n$ converge.
3. Montrer que si $(u_n)_n$ est bornée, alors $(C_n)_n$ est bornée. La réciproque est-elle vraie ?
4. Montrer que si $(u_n)_n$ est croissante, alors $(C_n)_n$ est croissante. La réciproque est-elle vraie ?

Exercice 25.
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle telle que $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Montrer $\displaystyle\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k\,u_k \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

Exercice 26.
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite à valeurs strictement positives.

1. Montrer que s'il existe $\ell \in \mathbb{R}$ telle que $\displaystyle\frac{u_{n+1}}{u_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$, alors $\sqrt[n]{u_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$.
2. En déduire $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}}$ et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \binom{2n}{n}^{1/n}$.

Exercice 27⁺.
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ deux suites réelles et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, w_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u_k v_{n+1-k}.$$

Montrer que si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ convergent alors $(w_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers le produit des limites.

Mélange

Exercice 28.

Montrer que toute suite d'entiers naturels convergente est stationnaire.

Exercice 29.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite strictement croissante. Montrer que $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} [u_n, u_{n+1}] = \left[u_0, \lim_{n\to+\infty} u_n\right[$.

Exercice 30 (Critère de D'Alembert).

Soit $(u_n)_n$ une suite à valeurs strictement positives et $\ell \in \mathbb{R}$ telle que

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell.$$

1. Montrer que si $\ell < 1$, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.
2. Montrer que si $\ell > 1$, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$.
3. Montrer que l'on ne peut rien dire si $\ell = 1$.

Exercice 31$^+$.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite positive telle que $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} \leqslant \dfrac{u_n + u_{n+1}}{2}$. Montrer qu'elle converge.

Exercice 32$^+$.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle et $E = \left\{u_n \,\middle|\, n \in \mathbb{N}\right\}$.

1. On suppose $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$. Montrer que E admet un minimum.
2. On suppose que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge. Montrer que E admet un extremum.

Exercice 33$^+$.

Soit $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telle que $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Montrer

$$\sup\left\{|u_k| \,\middle|\, k \geqslant n\right\} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0,$$

en n'oubliant pas de vérifier que la borne supérieure est bien définie.

Exercice 34$^+$.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'entiers naturels deux à deux distincts. Montrer $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.

Exercice 35$^+$ (Lemme sous-additif de Fekete).

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite positive *sous-additive*, c'est-à-dire telle que

$$\forall n, m \in \mathbb{N}^*, u_{n+m} \leqslant u_n + u_m.$$

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall \delta > 0, \exists N \in \mathbb{N} : \forall m \geqslant N, \dfrac{u_m}{m} \leqslant \dfrac{u_n}{n} + \delta$.
2. Montrer que
$$\frac{u_n}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \inf\left\{\frac{u_k}{k} \,\middle|\, k \in \mathbb{N}^*\right\}.$$

Suites extraites

Autocorrection F.

Montrer que toute suite périodique non constante diverge.

Exercice 36.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite convergente telle que $\left((-1)^n u_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge également. Que peut-on dire ?

Exercice 37.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle.

Montrer que si $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$, $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{3n})_{n\in\mathbb{N}}$ convergent, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

Exercice 38.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle.

1. On suppose que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et admet une suite extraite convergente. Que peut-on dire de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$?
2. On suppose que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et admet une suite extraite majorée. Que peut-on dire de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$?

Exercice 39$^+$.

Soit $(p_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ et $(q_n)_{n\in\mathbb{N}} \in (\mathbb{N}^*)^{\mathbb{N}}$ deux suites d'entiers telles que $\dfrac{p_n}{q_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \ell \notin \mathbb{Q}$. Montrer que

$$|p_n| \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty \qquad \text{et} \qquad |q_n| \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty.$$

Exercice 40 (Théorème de Bolzano-Weierstrass par le lemme des pics).

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. On définit $E = \left\{n \in \mathbb{N} \,\middle|\, \forall k > n, u_k < u_n\right\}$.

1. Montrer que si E est infini, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ possède une sous-suite décroissante.
2. Montrer que si E est fini, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ possède une sous-suite croissante.
3. Déduire de ce qui précède une nouvelle preuve du *théorème de Bolzano-Weierstrass*.

Exercice 41^{++}.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle telle que $u_{n+1} - u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

Montrer que l'ensemble des valeurs d'adhérence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est un intervalle.

Suites à valeurs complexes

Exercice 42.

Soit $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite complexe telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $z_{n+1} = 3z_n - \bar{z}_n$. Déterminer une expression explicite du terme général z_n.

Exercice 43.

Soit $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite vérifiant

$$\forall n \in \mathbb{N}, z_{n+1} = \frac{1}{4}z_n + \frac{3}{4}\overline{z_n}.$$

Étudier la convergence de $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et déterminer le cas échéant sa limite.

Exercice 44.

Soit $\theta \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} = (\cos n\theta)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} = (\sin n\theta)_{n\in\mathbb{N}}$.

1. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge si et seulement si $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.
2. En déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ divergent.

Exercice 45$^+$.

Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < 1$.

Déterminer si la suite $\left(\prod_{k=0}^{n}\left(1+z^{2^k}\right)\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente et, le cas échéant, déterminer sa limite.

Analyse asymptotique

Autocorrection G.

Soit $(u_n)_n$ une suite réelle. Écrire les assertions suivantes sous des formes plus simples.

(i) $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{2n} + \dfrac{1}{12n^2}$;

(ii) $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{n^2+2n+3}{3n^3-n}$;

(iii) $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{n+n^2}{\ln n - n^3}$;

(iv) $u_n = \left(1 + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\dfrac{1}{n}\right)\right)\left(\dfrac{1}{n^3} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\dfrac{1}{n^{10}}\right)\right)$;

(v) $u_n = \underset{n\to+\infty}{o}\left(\dfrac{1}{n^2}\right) + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\dfrac{1}{n}\right) - \underset{n\to+\infty}{o}\left(\dfrac{1}{\ln n}\right)$;

(vi) $u_n = \underset{n\to+\infty}{o}(n) - \underset{n\to+\infty}{o}(n)$;

(vii) $u_n = \underset{n\to+\infty}{o}(n) - \underset{n\to+\infty}{O}(n)$;

(viii) $u_n = (1 + \underset{n\to+\infty}{o}(1))v_n$.

Autocorrection H.

Soit $(u_n)_n$ une suite réelle. Classer les assertions suivantes de la plus forte (c'est-à-dire la plus contraignante) à la plus faible. Il peut y avoir des *ex-æquo*.

(i) $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$;

(ii) $u_n = \exp\left(\underset{n\to+\infty}{o}(1)\right)$;

(iii) $u_n = \underset{n\to+\infty}{O}(n)$;

(iv) $u_n = 1 + \underset{n\to+\infty}{o}(1)$;

(v) $u_n = 1 + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\dfrac{1}{n}\right)$;

(vi) $u_n = \underset{n\to+\infty}{o}(n)$;

(vii) $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} 1$;

(viii) $u_n = 1 + \underset{n\to+\infty}{O}\left(\dfrac{1}{n}\right)$;

(ix) $u_n = \underset{n\to+\infty}{O}(1)$;

(x) $u_n = 1 + \underset{n\to+\infty}{O}(1)$.

Autocorrection I.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}} \in (\mathbb{R}_+^*)^{\mathbb{N}}$ telles que $w_n \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$.

Montrer que $v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n$.

Autocorrection J.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Y a-t-il une implication entre $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$ et $u_n = v_n + \underset{n\to+\infty}{o}(1)$?

Autocorrection K.

Donner un équivalent simple des suites dont les termes généraux sont les suivants.

(i) $\dfrac{3n^4-2n^2+1}{2n^3+1}$;

(ii) $\dfrac{\ln n+n+1}{3n^2+2n+1}$;

(iii) $\ln\left(1+\dfrac{1}{n^2+1}\right)$;

(iv) $\ln\left(\dfrac{n+1}{n}\right)$;

(v) $\sin\sin\dfrac{\pi}{n^2}$;

(vi) $\dfrac{n^2\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\tan\frac{\pi}{n}}$;

(vii) $\ln(n+2)-\ln(n+1)$;

(viii) $(2n+\ln n^2)e^{-(n+1)}$;

(ix) $\dfrac{\ln(n^2+1)}{n+1}$;

(x) $\dfrac{\sqrt{n^2+n+1}}{\sqrt[3]{n^2-n+1}}$;

(xi) $\dfrac{n^3-\sqrt{n^2+1}}{5(\ln n)^3-2n^2}$;

(xii) $\dfrac{n!+e^n}{2^n+3^n}$;

(xiii) $\dfrac{1}{n+1}-\dfrac{1}{n-1}$;

(xiv) $\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}$;

(xv) $\sqrt{\ln(n+1)-\ln(n-1)}$.

Exercice 46.

Classer les suites par ordre de négligeabilité les suites dont les termes généraux sont les suivants.

(i) $\dfrac{1}{n}, \dfrac{1}{n^2}, \dfrac{\ln n}{n}, \dfrac{\ln n}{n^2}, \dfrac{1}{\ln n}, \dfrac{1}{n\ln n}$.

(ii) $n, n^2, n\ln n, \sqrt{n}\ln n, \dfrac{n}{\ln n}, \dfrac{n^2}{\ln n}$.

Exercice 47.

Déterminer un équivalent des suites dont les termes généraux sont les suivants.

(i) $2\sqrt{n}-\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}$;

(ii) $\sqrt[n+1]{n+1}-\sqrt[n]{n}$.

Exercice 48.

Déterminer un équivalent de $\left(\displaystyle\prod_{k=n^2+1}^{n^2+n}\frac{2k-1}{k}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Exercice 49.

Déterminer les limites des suites dont les termes généraux sont les suivants.

(i) $n\sqrt{\ln\left(1+\dfrac{1}{n^2+1}\right)}$;

(ii) $\left(1+\sin\dfrac{1}{n}\right)^n$;

(iii) $\left(n\sin\dfrac{1}{n}\right)^{n^2}$;

(iv) $\dfrac{n^{\sqrt{n+1}}}{(n+1)^{\sqrt{n}}}$;

(v) $n^2\left((n+1)^{1/n}-n^{1/n}\right)$;

(vi) $\left(3\sqrt[n]{2}-2\sqrt[n]{3}\right)^n$.

Exercice 50.

Pour $n\in\mathbb{N}^*$, on définit $u_n=\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$.

1. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge et déterminer sa limite.
2. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante à partir d'un certain rang, par exemple en étudiant le quotient de deux termes successifs.
3. Montrer (en utilisant la théorie de la convexité) que $x\mapsto\dfrac{\ln(1+x)}{x}$ est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$ et en déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est même croissante.

Exercice 51.

1. Montrer que toute suite équivalente à $(2^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante à partir d'un certain rang.
2. Construire une suite équivalente à $(n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui ne soit pas croissante à partir d'un certain rang.

   Même question pour $(n^2)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 52. ☑

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$.

1. Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $\dfrac{1}{\sqrt{n+1}} \leqslant 2(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}) \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{n}}$.
2. En déduire la limite de $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, puis déterminer un équivalent simple de $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Exercice 53. ☑

Montrer que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k! \underset{n\to+\infty}{\sim} n!$.

Exercice 54.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles divergeant vers $+\infty$.

On suppose $u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(v_n)$.

Montrer qu'il existe une suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(w_n)$ et $w_n \underset{n\to+\infty}{=} o(v_n)$.

Exercice 55.

Montrer qu'il existe deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que $u_n \underset{n\to+\infty}{=} O(v_n)$ sans que $v_n \underset{n\to+\infty}{=} O(u_n)$ ou $u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(v_n)$.

Exercice 56$^+$. ☑

Soit $u, v \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ deux suites divergeant vers $+\infty$. Montrer que la condition

$$\forall A > 0, u_n - Av_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$$

équivaut à $v_n = o(u_n)$.

Exercice 57. ☑

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites ne s'annulant pas à partir d'un certain rang.

Déterminer, en justifiant, si chacune des assertions suivantes est vraie ou fausse.

(i) Si $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$, alors $e^{u_n} \underset{n\to+\infty}{\sim} e^{v_n}$.

(ii) $e^{u_n} \underset{n\to+\infty}{\sim} e^{v_n}$ si et seulement si $u_n - v_n \underset{n\to+\infty}{=} o(1)$

(iii) Si $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$ et $u_n > 0$ à partir d'un certain rang, alors $\ln(u_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(v_n)$.

(iv) Si $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$ et $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$, alors $\ln(u_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(v_n)$.

Exercice 58. ☑

Soit u une suite décroissante telle que $u_n + u_{n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n}$. Déterminer un équivalent simple de u.

Exercice 59.

On note π la fonction de comptage des nombres premiers (c'est-à-dire que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\pi(x)$ est le nombre de nombres premiers $\leqslant x$ – par exemple, $\pi(\sqrt{10}) = 2$) et $(p_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite des nombres premiers.

1. On admet le *théorème des nombres premiers* : $\pi(n) \underset{n\to\infty}{\sim} \dfrac{n}{\ln n}$.

   Donner un DA à deux termes de $(p_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
2. On admet maintenant $\pi(n) = \dfrac{n}{\ln n} + \dfrac{n}{\ln^2 n} + o\left(\dfrac{n}{\ln^2 n}\right)$.

   Donner un DA à quatre termes de $(p_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Exercice 60$^+$.

Soit $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ une suite telle que $u_n \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{n}\right)$. Montrer $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{2n} u_k \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

Études de suites récurrentes et implicites

Suites récurrentes

Autocorrection L.

Étudier la nature de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n + \dfrac{1}{u_n^2}$.

Autocorrection M.

Étudier la nature de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = -\dfrac{1}{2}$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n + u_n^2$.

Exercice 61.

Étudier la nature de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = \dfrac{1}{2}$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \dfrac{u_n^2 + u_n}{2}$.

Exercice 62 (Méthode de Héron).

Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite définie par $u_0 > 0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(u_n + \dfrac{a}{u_n}\right)$.

1. Étudier la fonction $f : \begin{cases} \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{1}{2}\left(x + \dfrac{a}{x}\right) \end{cases}$. Montrer que pour tout $x \geqslant \sqrt{a}$, on a $f(x) \leqslant x$.
2. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \geqslant \sqrt{a}$ et que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante.
3. En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et déterminer sa limite.

Exercice 63.

On considère les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant la relation de récurrence $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = e\ln(u_n)$.

1. Étudier la nature de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans le cas où $u_0 \geqslant e$.
2. Que dire si $u_0 < e$?

Exercice 64.

Soit $f : \begin{cases}]-\infty, 2] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \sqrt{2-x} \end{cases}$.

On considère une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 \in]-\infty, 2]$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. Pour quelles valeurs de u_0 la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle bien définie ?
2. On suppose que u_0 a une telle valeur.

   Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et déterminer sa limite.

Exercice 65.

Étudier la nature de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 1 + \dfrac{2}{u_n}$.

Couples de suites

Exercice 66 (Moyenne arithmético-géométrique).

Soit $a > b \in \mathbb{R}_+^*$. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites définies par $u_0 = a$, $v_0 = b$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2}$ et $v_{n+1} = \sqrt{u_n v_n}$. Montrer que ces deux suites sont bien définies et qu'elles sont adjacentes.

(La limite commune de ces deux suites est, par définition, la *moyenne arithmético-géométrique* des deux nombres a et b.)

Exercice 67.

Soit $x > 1$. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites définies par $u_0 = x$, $v_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2}$ et $v_{n+1} = \dfrac{2u_n v_n}{u_n + v_n}$. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont bien définies, qu'elles sont adjacentes et calculer leur limite commune.

Suites implicites

Exercice 68.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ l'équation $x^n + x^{n-1} + \cdots + x = 1$ possède une unique solution dans $\mathbb{R}_+$. On la note x_n.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $1/2 \leqslant x_n \leqslant 1$.
3. Montrer que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante.
4. Montrer que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente et déterminer sa limite.

Exercice 69.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, soit $f_n : \begin{cases} \mathbb{R} \to & \mathbb{R} \\ x \mapsto x^5 + nx - 1. \end{cases}$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un unique réel u_n tel que $f_n(u_n) = 0$.
2. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ ainsi définie est décroissante.
3. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge, puis que sa limite est 0.

Asymptotique

Exercice 70.

Soit $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telle que $u_0 > 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \arctan(u_n)$.

1. Montrer que u est à valeurs > 0 et converge vers 0.
2. Montrer que $u_{n+1} - u_n \underset{n\to\infty}{\sim} -\dfrac{u_n^3}{3}$, et obtenir un équivalent de u.

Exercice 71.

Soit u une suite vérifiant $u_0 > 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \ln(1 + u_n)$. En déterminer un équivalent.

Exercice 72⁺. *Mines*

On définit la suite $x \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ par $x_0 > 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, x_{n+1} = x_n + \dfrac{1}{\ln x_n}$. En déterminer un équivalent.

Exercice 73.

1. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme unitaire, de degré 3, possédant trois racines distinctes a, b et c. Exprimer les coefficients de P en fonction de a, b et c.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $P_n = X^3 - (n+2)X^2 + (2n+1)X - 1 \in \mathbb{R}[X]$.

2. Montrer que, pour n assez grand, P_n possède trois racines a_n, b_n et c_n vérifiant

$$0 < a_n < 1 < b_n < 3 < \frac{2n+1}{3} < c_n.$$

3. Déterminer des équivalents simples des suites a, b et c ainsi définies.

Exercice 74.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, soit $f_n : x \mapsto x^5 + nx - 1$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un unique réel u_n tel que $f_n(u_n) = 0$, et que $u_n \in \left[0, \frac{1}{n}\right]$.
2. Montrer que $u_n \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{1}{n}$.
3. Donner un équivalent simple de $\left(\frac{1}{n} - u_n\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Exercice 75.

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un unique nombre réel x_n tel que $x_n + \sqrt[3]{x_n} = n$.
2. Déterminer la limite, puis un équivalent simple de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

3^+. Donner un développement asymptotique à trois termes de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 76.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation $x + \ln x = n$ possède une unique solution dans $\mathbb{R}_+^*$, que l'on notera u_n.
2. Déterminer la limite, puis un équivalent simple de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

3^+. Obtenir le développement asymptotique $u_n = n - \ln n + \frac{\ln(n)}{n} + \underset{n\to\infty}{o}\left(\frac{\ln(n)}{n}\right)$.

Exercice 77^{++}.

1. Montrer qu'il existe un unique $x_n \in \left]n\pi - \frac{\pi}{2}, n\pi + \frac{\pi}{2}\right[$ tel que $\tan(x_n) = \sqrt{x_n}$.
2. Déterminer la limite, puis un équivalent simple de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
3. Obtenir un développement asymptotique à quatre termes de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.