

Dénombrement

Mots et listes

Autocorrection A. ✓

Soit E l'ensemble des nombres à 7 chiffres ne comportant aucun 0.

1. Déterminer le cardinal de E .
2. Déterminer le cardinal de E_1 , la partie de E constituée des nombres ayant 7 chiffres différents.
3. Déterminer le cardinal de E_2 , la partie de E constituée des nombres pairs.
4. Déterminer le cardinal de E_3 , la partie de E constituée des nombres dont la suite des chiffres (dans l'ordre où ils sont écrits) est strictement croissante.

Autocorrection B. ✓

Tous les matins, vous choisissez entre thé et café, en cherchant à lutter contre la routine. Combien y a-t-il de manières de choisir votre boisson pour n petits déjeûners consécutifs :

- (i) sans aucune contrainte ?
- (ii) en étant sûr d'avoir bu au moins une fois chaque boisson ?
- (iii) en étant sûr d'avoir bu aussi souvent une boisson que l'autre ?
- (iv) en ne prenant jamais la même boisson deux jours de suite ?
- (v) en ne prenant jamais de café deux jours de suite ?
- (vi) en ne prenant jamais la même boisson trois jours de suite ?

Exercice 1. 💡

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note $E = \{0, 1\}^n$, que l'on interprète comme un ensemble de n -listes de 0 et de 1.

1. Soit $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$. Combien d'éléments de E ont exactement k occurrences de « 1 » ?
2. Soit $p \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Combien d'éléments de E ont leur première occurrence de « 1 » en p -ième position ?

Exercice 2⁺.

Déterminer le cardinal de

$$\left\{ \begin{pmatrix} a_1 & \cdots & a_n \\ b_1 & \cdots & b_n \end{pmatrix} \in M_{2,n}(\mathbb{R}) \mid \begin{array}{l} a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n \in \{0, 1\} \\ a_1 b_1 + \cdots + a_n b_n \text{ impair} \end{array} \right\}.$$

Exercice 3⁺⁺.

Un *mot de longueur* n (sous-entendu : sur l'alphabet $\{a, b\}$) est simplement un élément de $\{a, b\}^n$, que l'on écrira sans parenthèses ni virgules : $aaaabba = (a, a, a, a, b, b, a)$ est un mot de longueur 7.

Un *facteur* d'un tel mot w est simplement la donnée d'un mot formé de lettres consécutives dans w . Par exemple, tous les mots de longueur 2 sont des facteurs de $aaaabba$, mais aba , par exemple n'en est pas un.

1. Dénombrer les mots de longueur n dont aa n'est pas un facteur.
2. Dénombrer les mots de longueur n dont ab n'est pas un facteur.
3. Dénombrer les mots de longueur n dont aab n'est pas un facteur.

Parties

Autocorrection C.

On tire une main de 5 cartes d'un jeu de 32 cartes. Combien de tirages différents peut-on obtenir

- (i) sans imposer de contraintes sur les cartes?
- (ii) contenant 5 cœurs ou 5 trèfles?
- (iii) contenant 2 cœurs et 3 trèfles?
- (iv) contenant au moins un as?
- (v) contenant au plus un as?
- (vi) contenant au moins une paire (notamment, on comptera les brelans, les carrés, etc.)?
- (vii) contenant au moins deux paires de hauteur différentes (notamment, on comptera les fulls)?
- (viii) contenant exactement 2 as et exactement 3 cœurs?
- (ix) contenant exactement un as et au moins trois carreaux?
- (x) contenant au plus un cœur et au moins 2 rois?

Autocorrection D.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Si $A \subseteq \llbracket 1, n \rrbracket$ est une partie non vide, on définit son *diamètre*

$$\text{diam } A = \max A - \min A.$$

Soit $k \in \mathbb{N}$. Déterminer le nombre de parties de $\llbracket 1, n \rrbracket$ de diamètre k .

Exercice 4.

Soit E un ensemble fini.

1. Combien y a-t-il de couples (A, B) de parties de E disjointes?
2. Combien y a-t-il de couples (A, B) de parties de E tels que $A \subseteq B$?
3. Combien y a-t-il de couples (A, B) de parties de E tels que $A \cup B = E$?
4. Soit C une partie de E . Combien y a-t-il de couples (A, B) de parties de E tels que $A \cap B = C$?

Exercice 5.

Soit E un ensemble fini à n éléments. Quel est le cardinal de $\{(X, Y, Z) \in \mathcal{P}(E)^2 \mid X \subseteq Y \subseteq Z\}$?

Exercice 6.

Soit $k, n \in \mathbb{N}^*$. Combien y a-t-il de recouvrements disjoints $(S_1, \dots, S_k)$ de l'ensemble $\llbracket 1, n \rrbracket$?

Exercice 7.

Soit E un ensemble de cardinal n .

Dénombrer les couples $(X, Y) \in \mathcal{P}(E)^2$ tels que $X \cap Y$ soit un singleton.

Exercice 8⁺.

Combien y a-t-il de parties de $\llbracket 1, n \rrbracket$ ne contenant pas d'entiers consécutifs?

Calculs de sommes

Exercice 9. _____ 

Soit E un ensemble fini. Calculer

$$(i) \sum_{A \in \mathcal{P}(E)} |A|; \quad (ii) \sum_{(A,B) \in \mathcal{P}(E)^2} |A \cap B|; \quad (iii) \sum_{(A,B) \in \mathcal{P}(E)^2} |A \cup B|.$$

Exercice 10. _____

Calculer $\sum_{\substack{X,Y \in \mathcal{P}([1,n]) \\ X \cap Y = \emptyset}} (|X| + |Y|).$

Applications

Exercice 11. _____  

Soit $n, p \in \mathbb{N}^*$.

1. Déterminer le nombre d'applications $[1, p] \rightarrow [1, n]$ strictement croissantes.
2. Déterminer le nombre d'applications $[1, p] \rightarrow [1, n]$ croissantes
 - (a) en se ramenant à un dénombrement de compositions (c'est-à-dire à l'astuce *bars and stars*);
 - (b) en se ramenant au cas des applications strictement croissantes.

Exercice 12⁺ (Nombre de surjections). _____

Soit $n, p \in \mathbb{N}^*$. On note $S(n, p)$ le nombre de surjections d'un ensemble de cardinal n dans un ensemble de cardinal p .

1. Calculer $S(n, p)$ pour $p > n$, ainsi que $S(n, n)$, $S(n, 1)$ et $S(n, 2)$.
2. Calculer $S(n + 1, n)$.
3. Démontrer que pour tout $n > 1$ et tout $p > 1$, on a $S(n, p) = p [S(n - 1, p) + S(n - 1, p - 1)]$.
4. En déduire : $S(n, p) = \sum_{k=0}^p (-1)^{p-k} \binom{p}{k} k^n$.

Exercice 13⁺. _____

Écrire sous forme d'une somme le nombre d'applications $p : [1, n] \rightarrow [1, n]$ telles que $p \circ p = p$.

Coefficients binomiaux

Autocorrection E. _____ 

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer la formule $\binom{2n}{n} = \binom{n}{0}^2 + \binom{n}{1}^2 + \dots + \binom{n}{n}^2$.
2. Soit $n_1, \dots, n_p$ des entiers. Montrer que pour tout entier q ,

$$\binom{n_1 + \dots + n_p}{q} = \sum_{k_1 + \dots + k_p = q} \binom{n_1}{k_1} \dots \binom{n_p}{k_p}.$$

Exercice 14.

Soit $0 \leq k \leq n$ deux entiers. Montrer $\binom{n}{k} 2^k = \sum_{i=0}^k \binom{n}{i} \binom{n-i}{k-i}$ par le calcul, puis par une démonstration combinatoire (c'est-à-dire s'appuyant sur un dénombrement).

Exercice 15 (Somme de l'indice du haut : démonstration combinatoire).

1. Soit n et p des entiers tels que $n \geq p \geq 0$. Montrer la *formule de somme de l'indice du haut* :

$$\sum_{k=p}^n \binom{k}{p} = \binom{n+1}{p+1}.$$

à l'aide du principe d'addition, en regroupant les éléments de $\mathcal{P}_{p+1}([1, n+1])$ suivant leur plus grand élément.

2. Quelle formule obtient-on en considérant à la place le deuxième plus grand élément ?

Exercice 16⁺.

Soit $r, n \in \mathbb{N}^*$. Donner une démonstration combinatoire de la formule

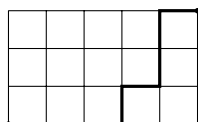
$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 r^k = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} \binom{2n-j}{n} (r-1)^j.$$

Exercice 17⁺⁺.

Donner une démonstration combinatoire de $\forall n, p \in \mathbb{N}^*, \sum_{\substack{(i_1, i_2, \dots, i_p) \in \mathbb{N}^p \\ i_1 + i_2 + \dots + i_p = n}} i_1 i_2 \dots i_p = \binom{n+p-1}{2p-1}.$

Exercice 18⁺ (Chemins N/E).

On appelle *chemin N/E* un chemin entre deux points de $\mathbb{Z}^2$ constitué de pas $E = (1, 0)$ et $N = (0, 1)$.



Le chemin $E^3 N E N^2 E$, reliant $(0, 0)$ à $(5, 3)$.

1. Compter le nombre de chemins N/E reliant $(0, 0)$ à (n, m) .

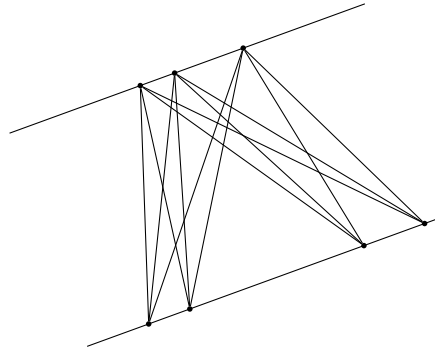
2. En déduire une démonstration combinatoire de la formule $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}.$

Mélange

Exercice 19.



On dispose de deux droites parallèles, dont l'une contient p points $A_1, \dots, A_p$ et l'autre en contient q , notés $B_1, \dots, B_q$. On suppose que trois des segments $[A_i B_j]$ ne sont jamais concourants.



Combien y a-t-il de points d'intersection entre les segments (sans compter les $p + q$ points initiaux) ?

Exercice 20.

Combien y a-t-il de façons de placer k tours sur un échiquier $n \times n$ sans qu'elles ne s'attaquent mutuellement ?

Exercice 21.

Montrer que toute involution d'un ensemble de cardinal impair possède un point fixe.

Exercice 22⁺.

Un ensemble d'entiers E est dit *sans somme* si $\forall x, y, z \in E, x + y \neq z$.

Quel est le cardinal maximal d'une partie sans somme de $\llbracket 1, n \rrbracket$?

Exercice 23⁺.

Soit S un ensemble de cardinal n et $A_1, \dots, A_m \subseteq S$ des parties vérifiant

$$\forall x, y \in S, x \neq y \Rightarrow \exists i \in \llbracket 1, m \rrbracket : (x \in A_i \text{ et } y \notin A_i) \text{ ou } (x \notin A_i \text{ et } y \in A_i).$$

Montrer que $m \geq \log_2(n)$.

Exercice 24⁺.



Montrer que tout entier relatif s'écrit de façon unique sous la forme $P(-2)$, où P est un polynôme à coefficients dans $\{0, 1\}$.

Exercice 25⁺.

Dans tout l'exercice, A et B désignent des parties de $\mathbb{N}^*$, et on note $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*} = (|A \cap \llbracket 1, n \rrbracket|)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et *idem* pour $(b_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

1. Montrer que (A, B) est un recouvrement disjoint de $\mathbb{N}^*$ si et seulement si $\forall n \in \mathbb{N}^*, a_n + b_n = n$.
2. Soit $\alpha, \beta \geq 1$. On définit $A = \{\lfloor n\alpha \rfloor \mid n \in \mathbb{N}^*\}$ et $B = \{\lfloor n\beta \rfloor \mid n \in \mathbb{N}^*\}$.

(a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, a_n = \left\lfloor \frac{n+1}{\alpha} \right\rfloor - \mathbb{1}_{(\frac{n+1}{\alpha} \in \mathbb{N}^*)}$ et en déduire la limite de $\left(\frac{a_n}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

(b) Montrer que (A, B) est un recouvrement disjoint de $\mathbb{N}^*$ si et seulement si α et β sont irrationnels et que $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1$.

Exercice 26⁺.

Dans cet exercice, étant donné deux parties X, Y de $\mathbb{Z}$ et un entier $d \in \mathbb{Z}$, on utilise les notations parlantes $X + Y = \{x + y \mid x \in X, y \in Y\}$ et $X + d = \{x + d \mid x \in X\}$.

Soit $A, B \subseteq \mathbb{Z}$ deux ensembles finis non vides.

0. Donner une majoration de $|A + B|$ en fonction de $|A|$ et $|B|$, et prouver qu'elle est optimale.

Le but de l'exercice est de déterminer une minoration optimale de $|A + B|$, ce qui est un peu plus subtil. On utilise pour cela une transformation due au physicien Freeman Dyson (1923-2020).

Pour tout $e \in \mathbb{Z}$, on définit $A_{(e)} = A \cup (B + e)$ et $B_{(e)} = (A - e) \cap B$.

1. Montrer $A_{(e)} + B_{(e)} \subseteq A + B$ et $|A_{(e)}| + |B_{(e)}| = |A| + |B|$.
2. Montrer que $B_{(e)}$ est non vide si et seulement si $e \in \{a - b \mid a \in A, b \in B\}$.
3. En appliquant ce qui précède à un e bien choisi, en déduire que $|A + B| \geq |A| + |B| - 1$.
4. Montrer que la minoration de la question précédente est optimale.