Limites et continuité

Exercice 5.

Pour la croissance, on pourra considérer deux points $x_0 < x_1$ dans $]a, b[$ et montrer l'encadrement $f(x_0^+) \leqslant f(x_1) \leqslant f(x_1^+)$.

Exercice 8.

Quelles sont les valeurs prises par la fonction $x \mapsto \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor^{-1}$?

Exercice 10.

Pour la deuxième question, on pourra chercher un exemple de la forme $\mathbb{1}_A$ pour un choix judicieux de partie $A \subseteq \mathbb{R}$.

Exercice 11.

On pourra s'inspirer de la preuve du théorème de Cesàro.

Exercice 13.

Soit $x_0 \in \mathbb{R}_+^*$. Le théorème de la limite monotone montre déjà l'inégalité $f(x_0^-) \leqslant f(x_0^+)$. Il s'agit donc d'utiliser l'autre hypothèse pour démontrer l'inégalité réciproque.

Exercice 18.

Pour la première question, il est facile de montrer que, quel que soit $x \in I$, $f(x) = \pm g(x)$. La difficulté est de montrer que le signe remplaçant le $\pm$ ne dépend pas de x.

Exercice 39.

On pourra d'abord montrer le résultat en restriction à $\mathbb{N}$, puis à $\mathbb{Z}$, puis à $\mathbb{Q}$.

Exercice 40.

On pourra commencer par montrer la définition de la convexité avec $\lambda \in [0, 1]$ dyadique (c'est-à-dire un rationnel dont le dénominateur est une puissance de 2).

Exercice 42.

On pourra commencer par montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, f\left(\frac{x}{2^n}\right) = f(x)$.

Exercice 45.

Le théorème des valeurs intermédiaires montre que dans tous les cas, $f[I]$ est un intervalle. Pour savoir quels types d'intervalles sont possibles, il est bon de tracer approximativement des graphes possibles avant de chercher à donner des formules.

Autocorrection

Autocorrection A.

(i) 0 ;

(ii) la fonction n'a pas de limite (on peut trouver deux suites $(\xi_n^{\pm})_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant $\xi_n^{\pm} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ et $\cos\left((\xi_n^{\pm})^2\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \pm 1$) ;

(iii) 1 (penser à la quantité conjuguée) ;

(iv) $+\infty$;

(v) 0 ;

(vi) 1 ;

(vii) 1 ;

(viii) e ;

(ix) 1 ;

(x) $\dfrac{1}{2}$ (penser à la quantité conjuguée) ;

(xi) 1 ;

(xii) $+\infty$;

(xiii) la fonction n'a pas de limite, mais elle converge vers $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ à droite et $-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ à gauche (on peut factoriser : $x^3 - 3x + 2 = (x-1)^2(x+2)$ et $2x^2 - x - 1 = (2x+1)(x-1)$) ;

(xiv) e (on peut par exemple utiliser la question (viii) et $\dfrac{1}{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$) ;

(xv) $1 + \sqrt{2}$ (penser à la quantité conjuguée) ;

(xvi) $-\dfrac{1}{2}$.

(xvii) $\dfrac{1}{2}$ (on peut utiliser la factorisation $x - 1 = (\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 1)$) ;

(xviii) 1 (on peut factoriser par x puis utiliser la quantité conjuguée) ;

(xix) On va utiliser à plusieurs reprises la limite du taux d'accroissement

$$\frac{\ln(x)}{x-1} = \frac{\ln(x) - \ln(1)}{x-1} \xrightarrow[x\to 1]{} \ln'(1) = 1.$$

On écrit alors, pour $x > 1$,

$$\begin{aligned}
\ln(x) \times \ln(\ln x) &= \frac{\ln(x)}{x-1} \times (x-1) \times \ln\left(\frac{\ln x}{x-1} \times (x-1)\right) \\
&= \frac{\ln(x)}{x-1} \times (x-1)\left(\ln\left(\frac{\ln x}{x-1}\right) + \ln(x-1)\right) \\
&= \frac{\ln(x)}{x-1} \times (x-1) \times \ln\left(\frac{\ln x}{x-1}\right) + \frac{\ln(x)}{x-1} \times (x-1) \times \ln(x-1).
\end{aligned}$$

En plus de la limite déjà mentionnée, et qui implique en particulier $\ln\left(\dfrac{\ln x}{x-1}\right) \xrightarrow[x\to 1]{} 0$, on utilise les croissances comparées pour obtenir $(x-1)\ln(x-1) \xrightarrow[x\to 1]{} 0$.
Par opérations, on obtient que la limite est 0.

(xx) On a la limite du taux d'accroissement

$$\frac{1-\cos t}{t} = -\frac{\cos t - \cos 0}{t-0} \xrightarrow[t\to 0]{} -\cos'(0) = 0.$$

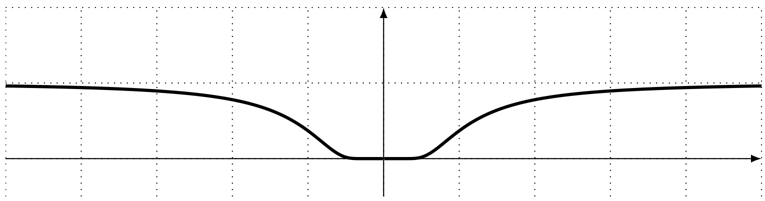
Comme en outre $\arccos x \xrightarrow[x\to 1]{} 0$ on a par composition

$$\frac{1-x}{\arccos x} \xrightarrow[x\to 1]{} 0.$$

Autocorrection B.

(i) La formule définit une application $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$, continue par opérations.
On a $-\dfrac{1}{x^2} \xrightarrow[x\to 0]{} -\infty$, donc $f(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 0$: la fonction admet le prolongement continu

$$\widetilde{f} : \begin{cases} \mathbb{R} \to & \mathbb{R} \\ x \mapsto & \begin{cases} f(x) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \end{cases}$$



(ii) La formule définit une application $f : \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\} \to \mathbb{R}$, continue par opérations.
On a $x \ln x \xrightarrow[x\to 0]{} 0$ par croissance comparée, donc

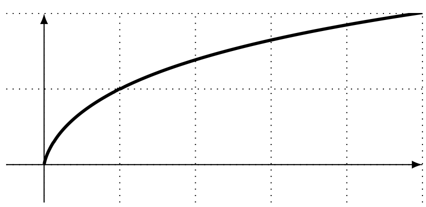
$$f(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 0.$$

Par ailleurs, on a la limite du taux d'accroissement $\dfrac{\ln x - \ln 1}{x-1} \xrightarrow[x\to 1]{} \ln'(1) = 1$, ce qui implique

$$f(x) \xrightarrow[x\to 1]{} 1.$$

Ainsi, la fonction admet le prolongement continu

$$\widetilde{f} : \begin{cases} \mathbb{R}_+ \to & \mathbb{R} \\ x \mapsto & \begin{cases} f(x) & \text{si } x \notin \{0,1\} \\ 0 & \text{si } x = 0\,; \\ 1 & \text{si } x = 1. \end{cases} \end{cases}$$



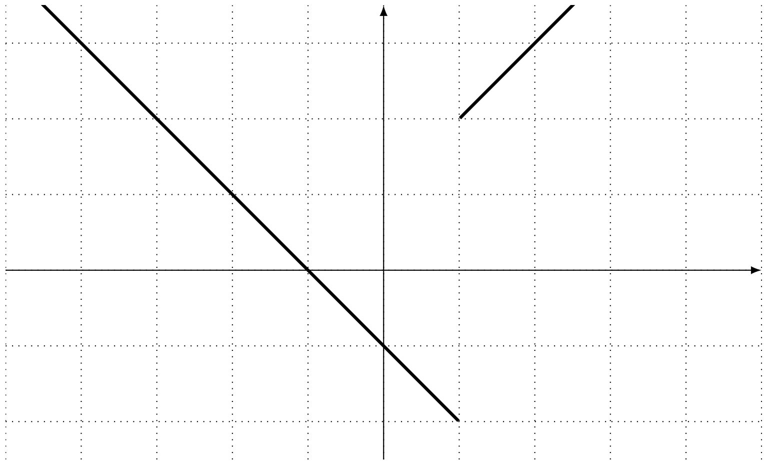
(iii) La formule définit une application

$$f : \begin{cases} \mathbb{R}\setminus\{1\} \to & \mathbb{R} \\ x \mapsto & \dfrac{x^2-1}{|x-1|} = \dfrac{x-1}{|x-1|}(x+1) = (x+1) \times \text{signe}(x-1), \end{cases}$$

continue par opérations.
On a

$$f(x) \xrightarrow[\substack{x \to 1 \\ x<1}]{} -2 \qquad \text{et} \qquad f(x) \xrightarrow[\substack{x \to 1 \\ x>1}]{} 2,$$

donc f n'a pas de limite en 2, et f n'a donc pas de prolongement continu en 1.



(iv) La formule définit une application

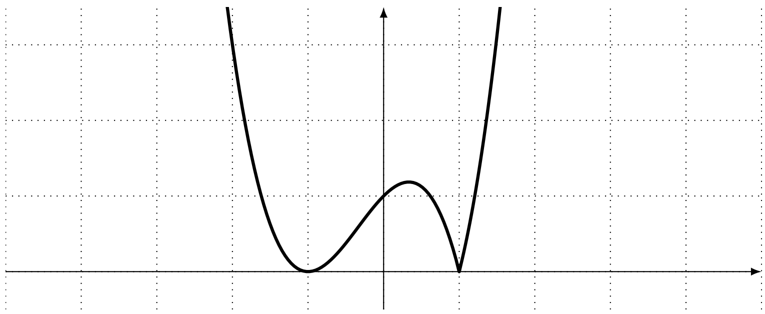
$$f : \begin{cases} \mathbb{R} \setminus \{1\} \to & \mathbb{R} \\ \quad x \quad \mapsto & \dfrac{(x^2-1)^2}{|x-1|} = |x-1| \times (x+1)^2, \end{cases}$$

continue par opérations.
On a

$$f(x) \xrightarrow[x \to 1]{} 0,$$

donc f admet le prolongement continu

$$\tilde{f} : \begin{cases} \mathbb{R} \to & \mathbb{R} \\ x \mapsto & \begin{cases} f(x) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \end{cases}$$



(v) La formule définit une application

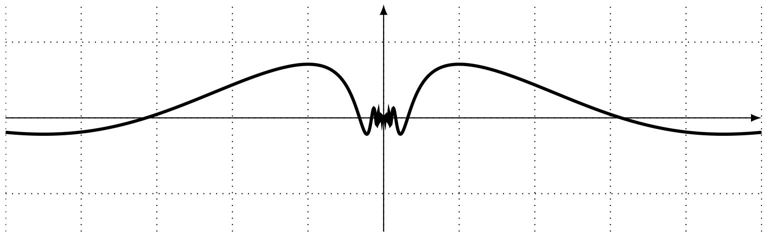
$$f : \begin{cases} \mathbb{R}^* \to & \mathbb{R} \\ x \mapsto & \sin x \times \sin\left(\dfrac{1}{x}\right), \end{cases}$$

continue par opérations.
On a

$$\forall x, |f(x)| \leqslant \underbrace{|\sin x|}_{\xrightarrow[x \to 0]{} 0},$$

donc le théorème des gendarmes entraîne que $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$, ce qui entraîne que f admet le prolongement continu

$$\widetilde{f} : \begin{cases} \mathbb{R} \to & \mathbb{R} \\ x \mapsto & \begin{cases} f(x) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases} \end{cases}$$



(vi) La formule définit une application

$$f : \begin{cases} \mathbb{R}^* \to & \mathbb{R} \\ x \mapsto & \cos x \times \cos\left(\dfrac{1}{x}\right), \end{cases}$$

continue par opérations.
Considérons deux suites $(\xi_n^{\pm})_{n\in\mathbb{N}^*}$ définies par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \xi_n^- = \frac{1}{(2n+1)\pi} \qquad \text{et} \qquad \xi_n^+ = \frac{1}{(2n)\pi}.$$

Ces suites sont à valeurs dans $\mathbb{R}^*$, et convergent vers 0. Par continuité, cela entraîne que

$$\cos(\xi_n^-) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1 \qquad \text{et} \qquad \cos(\xi_n^+) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1.$$

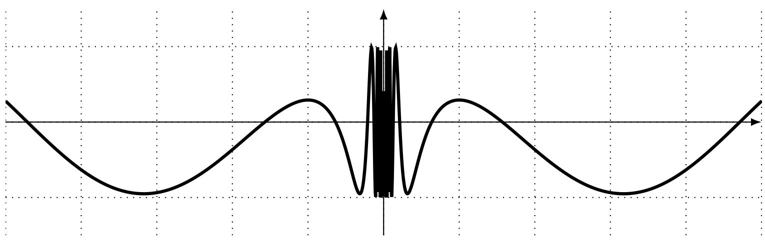
On a, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\cos\left(\dfrac{1}{\xi_n^-}\right) = -1$, donc

$$f(\xi_n^-) = \cos(\xi_n^-) \times \cos\left(\frac{1}{\xi_n^-}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} -1.$$

De même, on a, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\cos\left(\dfrac{1}{\xi_n^+}\right) = 1$, donc

$$f(\xi_n^+) = \cos(\xi_n^+) \times \cos\left(\frac{1}{\xi_n^+}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1.$$

Cela démontre que f n'a pas de limite en 0. En particulier, f n'est pas prolongeable par continuité en 0.



Autocorrection C.

Soit

$$f : \begin{cases} \mathbb{R} \to & \mathbb{R} \\ x \mapsto e^x - \pi^2 \ln(x^2+1). \end{cases}$$

C'est une fonction continue, par opérations.

On a $f(0) = 1 > 0$, $f(1) = e - \pi^2 \ln(2) < 0$, et les limites

$$f(x) \xrightarrow[x \to -\infty]{} -\infty \qquad \text{et} \qquad f(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty \text{ (par croissance comparée).}$$

- D'après le théorème des valeurs intermédiaires (généralisé), la fonction f s'annule en un point $x_0 \in]-\infty, 0]$, nécessairement $x_0 < 0$ (car $f(0) \neq 0$).
- D'après le théorème des valeurs intermédiaires, la fonction f s'annule en un point $x_1 \in [0, 1]$, nécessairement $0 < x_1 < 1$.
- D'après le théorème des valeurs intermédiaires (généralisé), la fonction f s'annule en un point $x_1 \in]1, +\infty]$, nécessairement $x_2 > 1$ (car $f(1) \neq 0$).