Dérivation

Généralités

Autocorrection A.

Dire, en justifiant, si les assertions suivantes sont vraies ou fausses.

(i) Si f est une application dérivable en a alors $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h} = f'(a)$ pour h suffisamment petit.

(ii) Une application f n'est pas dérivable en a si et seulement si $\left|\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}\right| \xrightarrow[x\to a]{} +\infty$.

(iii) Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ et $c \in]a,b[$. L'application f est dérivable si et seulement $f_{|[a,c]}$ et $f_{|[c,b]}$ le sont.

(iv) Une application dérivable de $\mathbb{R}^*$ dans $\mathbb{R}$ dont la dérivée est nulle est constante.

(v) Il existe $f \in D^1(\mathbb{R}_+;\mathbb{R})$ tendant vers $+\infty$ en $+\infty$ et dont la dérivée tend vers 0.

(vi) Si $f \in D^1(\mathbb{R}_+;\mathbb{R})$ tend vers 0 en $+\infty$, alors f' tend vers 0 en $+\infty$.

Exercice 1.

Étudier la dérivabilité des fonctions suivantes (on précisera les domaines de définition).

1. $x \mapsto \sqrt{x^2 - x^3}$;
2. $x \mapsto (x^2-1)\arccos(x^2)$;
3. $x \mapsto x|x|$;
4. $x \mapsto \dfrac{x}{|x|+1}$.

Exercice 2.

En quels points la fonction $x \mapsto \mathbb{1}_{\mathbb{Q}}(x)\, x^2$ est-elle dérivable ?

Exercice 3.

Que peut-on dire de la dérivée d'une fonction dérivable paire ? impaire ? périodique ?

Exercice 4.

Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on considère $f_\lambda : x \mapsto \dfrac{x+\lambda}{x^2+1}$ et sa tangente $T_\lambda(a)$ au point d'abscisse $a \in \mathbb{R}$.

1. Montrer que les droites $T_\lambda(0)$ ($\lambda \in \mathbb{R}$) sont parallèles.
2. Montrer que les droites $T_\lambda(1)$ ($\lambda \in \mathbb{R}$) sont concourantes.

Exercice 5.

Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable. À quelle condition la fonction

$$g : \begin{cases} [0,1] \to & \mathbb{R} \\ x \mapsto & \begin{cases} f(2x) & \text{si } x \in [0,1/2] \\ f(2x-1) & \text{sinon} \end{cases} \end{cases}$$

est-elle dérivable sur $[0,1]$?

Exercice 6$^+$.

Soit $f, g \in D^1(\mathbb{R})$ et $x_0 \in \mathbb{R}$.

Donner une condition nécessaire et suffisante pour que $\max(f, g)$ soit dérivable en x_0.

Exercice 7.

Soit $a \in \mathbb{R}$ et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. On note $\sigma_{[f,a]} : x \mapsto \dfrac{f(a+h) - f(a-h)}{2h}$.

1. Montrer que si f est dérivable en a, la fonction $\sigma_{[f,a]}$ admet une limite finie en a (et la préciser).
2. La réciproque de la question précédente est-elle vraie ?

Exercice 8.

Soit $a \in \mathbb{R}$ et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application dérivable en a.

Montrer que $x \mapsto \dfrac{xf(a) - af(x)}{x - a}$ admet une limite en a, et la préciser.

Exercice 9$^+$.

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue en 0, et $g : \begin{cases} \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ h & \mapsto & \dfrac{f(2h) - f(h)}{h} \end{cases}$.

Montrer que g possède une limite en 0 si et seulement si f est dérivable à droite en 0 (et, dans ce cas, donner une relation entre $\lim\limits_{x \to 0} g(x)$ et $f'_d(0)$).

Exercice 10$^+$.

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable à droite en 0, et telle que $f(0) = 0$.

Déterminer la limite de la suite $\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n^2}\right) \right)_{n \in \mathbb{N}}$.

Exercice 11$^+$.

On note, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n+k}$.

1. Montrer que la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge. On note S sa limite.
2. Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ dérivable et nulle en 0.

   Calculer la limite de $\left(\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{1}{n+k}\right) \right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ en fonction de S et $f'(0)$.
3. En utilisant la fonction $f : x \mapsto \ln(1 + x)$, calculer S.

Exercice 12$^+$ (Équation fonctionnelle de Cauchy : le cas dérivable).

Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivables telles que $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $f(x + y) = f(x) + f(y)$.

Exercice 13$^+$.

Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ dérivables telles que $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $f(2x) = 2f(x)$.

Extrema

Autocorrection B.

Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ dérivable, admettant un minimum local en 0. Que peut-on dire de $f'(0)$?

Exercice 14.

Déterminer $\max \left\{ n^{1/n} \,\middle|\, n \in \mathbb{N}^* \right\}$.

Exercice 15.

Déterminer tous les extrema locaux de

$$f : \begin{cases} \mathbb{R} \to & \mathbb{R} \\ x \mapsto & \begin{cases} e^{-1/|x|} \left(\sqrt{2} + \sin \frac{1}{x} \right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases} \end{cases}$$

Théorèmes de Rolle, des accroissements finis et de la limite de la dérivée

Autocorrection C.

Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$. Montrer qu'il existe $x \in \left]0, 1\right[$ tel que $4ax^3 + 3bx^2 + 2cx = a + b + c$.

Exercice 16.

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable admettant une même limite finie $\ell \in \mathbb{R}$ en $\pm\infty$.

On veut montrer que f' possède (au moins) un zéro sur $\mathbb{R}$.

Première méthode. Posons

$$\varphi : \begin{cases} \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[& \to \mathbb{R} \\ x & \mapsto f(\tan(x)). \end{cases}$$

1. Montrer que φ est dérivable.
2. Montrer que φ admet un prolongement continu $\widetilde{\varphi} : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}$.
3. Montrer que $\exists c \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[: \varphi'(c) = 0$.
4. En déduire que f' possède (au moins) un zéro sur $\mathbb{R}$.

Deuxième méthode. Montrer qu'il existe deux réels $x_- < x_+$ tels que $f(x_-) = f(x_+)$ et conclure.

Exercice 17$^+$.

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable vérifiant $f(0) = f(a) = f'(0) = 0$ pour un certain $a \neq 0$.

Montrer qu'il existe un point ($\neq (0,0)$) sur le graphe de f en lequel la tangente passe par $(0,0)$.

Exercice 18$^+$.

Soit P un polynôme. Montrer que l'équation $P(x) = e^x$ n'admet qu'un nombre fini de solutions.

Exercice 19^{++}.

Soit P un polynôme tel que l'équation $P(x) = \cos(x)$ possède une infinité de solutions.

Montrer que P est constant.

Exercice 20.

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable telle que $f'(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$. Montrer que $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$.

Exercice 21 (Une autre démonstration du théorème de Darboux).

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ dérivable dont la dérivée ne s'annule pas.

1. Montrer qu'elle est injective.
2. En déduire que f' ne change pas de signe.
3. Démontrer le théorème de Darboux.

Exercice 22$^+$.

1. Soit f dérivable telle que $xf'(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 1$. Montrer que $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$.
2. Peut-on trouver f telle que $xf'(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$ et $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$?

Exercice 23.

Soit $f \in D^1([a,b];\mathbb{R})$ telle que $f(a) = f(b)$ et $f'(a) > 0$.

Montrer que f' prend au moins une valeur strictement négative sur $[a, b]$.

Exercice 24$^+$.

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable telle que $\forall x \in \mathbb{R}, f(x)\,f'(x) \geqslant 0$. Montrer que l'ensemble des points où f ne s'annule pas est un intervalle de la forme $]T, +\infty[$, avec $T \in \overline{\mathbb{R}}$.

Exercice 25.

1. Montrer $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \dfrac{1}{x+1} \leqslant \ln(x+1) - \ln(x) \leqslant \dfrac{1}{x}$.
2. En déduire les limites de $\left(\dfrac{1}{\ln n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $\left(\displaystyle\sum_{k=n+1}^{np}\dfrac{1}{k}\right)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 26.

Déterminer la limite éventuelle de $x \mapsto (x+1)e^{1/(x+1)} - xe^{1/x}$ en $+\infty$.

Exercice 27.

1. (a) Dresser le tableau de variations de $f : x \mapsto \dfrac{e^x}{e^x+1}$.
   (b) Montrer que $[0, 1]$ est un intervalle stable sous f et en déduire que f admet un point fixe $\ell \in [0, 1]$.
   (c) Montrer que f est contractante.
   (d) On définit une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en posant $u_0 \in [0, 1]$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \dfrac{e^{u_n}}{e^{u_n}+1}$.
   Déduire de ce qui précède que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.
2. Reprendre les questions pour la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $v_0 \in [0, 1]$ et $\forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} = \dfrac{e^{v_n}}{v_n+2}$.

Exercice 28.

Une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est dite *α-höldérienne* s'il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\forall x, y \in I, |f(x) - f(y)| \leqslant C\,|x - y|^{\alpha}.$$

Montrer que si I est un intervalle et que $\alpha > 1$, les fonctions α-höldériennes sont constantes.

Exercice 29^{+}.

Soit $f \in C^0(\mathbb{R}_+)$ dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, de dérivée croissante, et telle que $f(0) = 0$.

Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $\dfrac{f(x)}{x} \leqslant f'(x)$.

Exercice 30^{+}.

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable telle que $f'(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} \ell$. Montrer $\dfrac{f(x)}{x} \xrightarrow[x \to +\infty]{} \ell$.

Exercice 31.

Étudier la dérivabilité en 0 de la fonction $x \mapsto \cos(\sqrt{x})$.

Exercice 32.

Déterminer l'ensemble des points où la fonction $f : \begin{cases} \mathbb{R} \to & \mathbb{R} \\ x \mapsto \arcsin\left(\dfrac{2x}{1+x^2}\right) \end{cases}$ est dérivable.

Dérivées supérieures

Exercice 33.

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = e^{x\sqrt{3}} \sin x$.

1. Montrer $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, f^{(n)}(x) = 2^n e^{x\sqrt{3}} \sin\left(x + \dfrac{n\pi}{6}\right)$.
2. Retrouver ce résultat à l'aide de l'exponentielle complexe.

Exercice 34.

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies sur $]0, 1[$ par

$$f_0 : x \mapsto \frac{1}{1-x} \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N}, f_{n+1}(x) = x f_n'(x).$$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe une fonction polynomiale P_n de degré n et à coefficients dans $\mathbb{N}$ telle que $\forall x \in]0, 1[\,, f_n(x) = \dfrac{P_n(x)}{(1-x)^{(n+1)}}$.
2. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est strictement positive.

Exercice 35^{+}.

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = e^{-1/x}$ si $x > 0$ et $f(x) = 0$ sinon.

1. Montrer que f est lisse sur $\mathbb{R}_+^*$ et que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe une fonction polynomiale P_n telle que
$$\forall x > 0, f^{(n)}(x) = e^{-1/x} P_n(1/x).$$
2. Montrer que f est lisse sur $\mathbb{R}$.
3. Soit S un segment non trivial de $\mathbb{R}$. Montrer qu'il existe $h \in C^{\infty}(\mathbb{R})$ non nulle telle que $h_{|\mathbb{R}\setminus S} = 0$.

Exercice 36.

Soit $f_1, \dots, f_n \in C^p(\mathbb{R})$. Montrer que $f_1 \cdots f_n \in C^p(\mathbb{R})$ et que

$$(f_1 \cdots f_n)^{(p)} = \sum_{k_1+\cdots+k_n=p} \frac{p!}{k_1! \cdots k_n!} f_1^{(k_1)} \cdots f_n^{(k_n)}.$$

Exercice 37.

Soit $f \in C^n(\mathbb{R}_+^*)$ et $g : x \mapsto f(1/x)$. Montrer que $g \in C^n(\mathbb{R}_+^*)$ et que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, g^{(n)}(x) = (-1)^n \sum_{p=0}^{n-1} \binom{n}{p} \frac{(n-1)(n-2)\cdots(n-p)}{x^{2n-p}} f^{(n-p)}\left(\frac{1}{x}\right).$$

Exercice 38.

Prolonger par continuité si besoin chacune des fonctions suivantes, puis étudier la classe de la fonction obtenue.

(i) $f : x \mapsto x \sin \dfrac{1}{x}$;

(ii) $f : x \mapsto x^2 \sin \dfrac{1}{x}$;

(iii) $f : x \mapsto \begin{cases} \sqrt{x} \sin x & \text{si } x > 0 \\ x^2 & \text{si } x \leqslant 0 \end{cases}$;

(iv) $f : x \mapsto \begin{cases} x + a + be^x & \text{si } x \geqslant 0 \\ \cos x - x & \text{si } x < 0. \end{cases}$

Exercice 39.

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ l'application définie par $f(x) = e^x + x$.

1. Montrer que f est bijective.
2. Montrer que f^{-1} est dérivable et déterminer la valeur de $(f^{-1})'(1)$.
3. Montrer que f^{-1} est deux fois dérivable et donner la valeur de $(f^{-1})''(1)$.

Exercice 40$^+$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit $f \in D^n(I)$, s'annulant $n+1$ fois sur I. Montrer que $f^{(n)}$ s'annule.

Exercice 41$^+$.

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $f \in D^n(\mathbb{R})$ tels que $f(0) = 0$ et $\forall k \in [\![0, n-1]\!], f^{(k)}(1) = 0$. Montrer que $f^{(n)}$ s'annule.

Exercice 42$^+$.

Soit $f \in C^2([0,1])$ telle que $f(0) = f'(0) = f(1) = f'(1) = 0$.

Montrer qu'il existe $c \in [0,1]$ tel que $f''(c) = f(c)$.

Mélange

Exercice 43.

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction lisse et périodique. Montrer que f est lipschitzienne.

Exercice 44$^+$.

Soit $f \in C^2(\mathbb{R}_+)$ telle que $f'(0) = 0$. Montrer qu'il existe $g \in C^1(\mathbb{R}_+)$ telle que $\forall x \in \mathbb{R}_+, f(x) = g(x^2)$.

Exercice 45^{++}.

Soit $f \in C^2(\mathbb{R}_+)$ telle que $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$.

1. Si f'' est bornée, montrer $f'(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$.
2. Le résultat reste-t-il vrai sans l'hypothèse sur f'' ?

Exercice 46^{++}.

Soit $f \in C^1(\mathbb{R})$ positive. Montrer qu'il existe une suite réelle $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $f'(x_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

Exercice 47^{+} (Nombre de Liouville).

1. Soit $P \in \mathbb{Z}[X]$ de degré n et x une racine de P.
   Montrer qu'il existe une constante $C > 0$ telle que, pour tous $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{N}^*$, on ait
   $$\left|x - \frac{a}{b}\right| \geqslant \frac{C}{b^n}.$$
2. (a) Montrer que la suite $\left(\sum_{k=0}^{n} 2^{-k!}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

   (b) Montrer que sa limite est un nombre *transcendant*, c'est-à-dire qu'elle n'est racine d'aucun polynôme de $\mathbb{Z}[X] \setminus \{0\}$.

Remarque. C'est historiquement le premier exemple de nombre transcendant (Liouville, 1844).

Exercice 48^{++}. *Ulm*

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré n, et $Q = P + P' + \cdots + P^{(n)}$.

Montrer que si P est à valeurs positives (c'est-à-dire que $\forall x \in \mathbb{R}, P(x) \geqslant 0$), alors Q aussi.