

Espaces vectoriels

Exercice 3.

On ne cherchera pas une loi d'addition naturelle (encore que...), mais on pourra exploiter l'existence d'une bijection $\mathbb{R} \rightarrow]-1, 1[$.

Exercice 13.

On pourra essayer de modifier la base canonique $(E_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ afin de remplacer les $E_{i,j}$ par des matrices inversibles.

Exercice 21.

Remarquez que, si F et G sont deux sous-espaces vectoriels de E , leur union $F \cup G$ vérifie déjà deux des trois axiomes de sous-espace vectoriel. Il va donc falloir exploiter le troisième.

Exercice 24.

Voilà deux chemins possibles pour faire l'exercice :

- ▶ on peut faire une récurrence, en s'appuyant sur le fait que la famille au rang $n + 1$ est obtenue en multipliant chaque polynôme de la famille au rang n par $X - a$, puis en ajoutant le polynôme $(X - b)^{n+1}$;
- ▶ on peut aussi montrer directement qu'un élément de $\mathbb{C}_n[X]$ s'écrit de manière unique sous la forme $\sum_{k=0}^n \lambda_k (X - a)^k (X - b)^{n-k}$. Pour cela, on peut se ramener à un système de forme particulière en utilisant le résultat $\forall P, Q \in \mathbb{C}_n[X], P = Q \Leftrightarrow \forall j \in \llbracket 0, n \rrbracket, P^{(j)}(a) = P^{(j)}(b)$. (Pourquoi est-il vrai, déjà ?)

Exercice 30.

On pourra commencer par rendre plus concrète la définition du premier sous-espace vectoriel, en le réécrivant par exemple comme un sous-espace vectoriel engendré par une (petite) famille.

Exercice 34.

L'exercice vous pousse à la faute : vérifiez, par la construction d'un contre-exemple, que **l'on ne peut pas** en déduire $\text{Vect}(y_1, \dots, y_r) \cap F = \{0_E\}$.

Autocorrection

Autocorrection A.

1. Non. En effet, une combinaison linéaire des deux vecteurs de l'énoncé est un vecteur s'écrivant sous la forme

$$\lambda(1, 2, 0) + \mu(2, 1, 0) = (\lambda + 2\mu, 2\lambda + \mu, 0),$$

pour un certain couple $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ de réels.

Un tel vecteur a manifestement sa troisième coordonnée nulle, ce qui n'est pas le cas de $(3, 3, 1)$.

2. Non. En effet, une combinaison linéaire des deux vecteurs de l'énoncé est un vecteur s'écrivant sous la forme

$$\lambda(1, 2, 0) + \mu(1, 1, 1) = (\lambda + \mu, 2\lambda + \mu, \mu),$$

pour un certain couple $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ de réels.

Pour que ce vecteur soit égal à $(3, 3, 1)$, il faudrait avoir $\mu = 1$, d'où $\lambda + 1 = 2\lambda + 1 = 3$, ce qui est impossible.

3. Non. Supposons par l'absurde que la fonction $f : x \mapsto \cos(2x)$ soit combinaison linéaire de $\cos$ et $\sin$. On pourrait alors trouver un couple de scalaires $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$f = \lambda \cos + \mu \sin,$$

c'est-à-dire tel que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \cos(2x) = \lambda \cos(x) + \mu \sin(x). \quad (\star)$$

Pour voir que c'est impossible, on peut essayer par exemple d'exploiter les propriétés de π -périodicité de la fonction f . Par exemple, l'assertion $(\star)$ implique en particulier pour $x = 0$ et $x = \pi$ les égalités

$$\begin{cases} 1 = \lambda \\ 1 = -\lambda, \end{cases}$$

qui sont manifestement absurdes.

4. Il s'agit des suites 2-périodiques. Montrons-le.

- Déjà, les suites $(1)_{n \in \mathbb{N}}$ et $((-1)^n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont 2-périodiques, donc on vérifie alors immédiatement que la même propriété doit être satisfaite par chacune de leurs combinaisons linéaires.
- Réciproquement, soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite 2-périodique. On peut donc trouver deux valeurs $p, i \in \mathbb{R}$ telles que

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \begin{cases} p & \text{si } n \text{ est pair} \\ i & \text{si } n \text{ est impair.} \end{cases}$$

On vérifie alors (par disjonction des cas) que

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{p+i}{2} \times 1 + \frac{p-i}{2} \times (-1)^n,$$

ce qui montre bien que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est combinaison linéaire des deux suites $(1)_{n \in \mathbb{N}}$ et $((-1)^n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Autocorrection B.

1. Prenons par exemple $w = (0, 1, 1)$. Montrons par l'absurde que $w \notin \text{Vect}(a, b)$.

Supposons donc $w \in \text{Vect}(a, b)$. On peut donc trouver deux scalaires λ et μ tels que

$$w = \lambda a + \mu b = (-\lambda, 2\lambda + \mu, \lambda - \mu).$$

Cela entraîne $\lambda = 0$, puis $2\lambda = \lambda = 1$, ce qui est absurde.

(On a ici habilement pris un vecteur dont la première coordonnée était nulle, ce qui simplifiait les calculs, mais une autre possibilité est de choisir un w un peu au hasard, et de résoudre le système linéaire à deux inconnues (λ et μ) et trois équations que l'on obtient alors, en espérant montrer qu'il est incompatible.)

2. ► En résolvant des systèmes linéaires, on montre que a et b appartiennent à $\text{Vect}(u, v)$:

$$a = -\frac{1}{5}u + \frac{2}{5}v \quad \text{et} \quad b = \frac{2}{5}u + \frac{1}{5}v.$$

Comme $\text{Vect}(u, v)$ est un sous-espace vectoriel, la stabilité par combinaison linéaire entraîne $\text{Vect}(a, b) \subseteq \text{Vect}(u, v)$.

- Réciproquement, en résolvant des systèmes linéaires, on montre que u et v appartiennent à $\text{Vect}(a, b)$:

$$u = -a + 2b \quad \text{et} \quad v = 2a + b.$$

Par stabilité par combinaison linéaire, on en déduit $\text{Vect}(u, v) \subseteq \text{Vect}(a, b)$.

3. Commençons par trouver un triplet non nul de réels (α, β, γ) tel que a et b vérifient l'équation $\alpha x + \beta y + \gamma z = 0$.

Autrement dit, on cherche une solution (α, β, γ) non nulle au système

$$\begin{cases} -\alpha + 2\beta + \gamma = 0 \\ \beta - \gamma = 0. \end{cases}$$

Après résolution, on voit que $(\alpha, \beta, \gamma) = (3, 1, 1)$ convient (ainsi que tous ses multiples non nuls).

Le système linéaire homogène (à une inconnue) $3x + y + z = 0$ a alors a et b comme solutions. Par principe de superposition, toute combinaison linéaire de a et b est alors également solution, ce qui montre que

$$\forall (x, y, z) \in \text{Vect}(a, b), 3x + y + z = 0.$$

4. La question précédente montre déjà l'inclusion $\text{Vect}(a, b) \subseteq \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 3x + y + z = 0\}$. Montrons l'inclusion réciproque.

Soit donc $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tel que $3x + y + z = 0$. On cherche deux réels λ et μ tels que $(x, y, z) = \lambda a + \mu b$. Résolvons le système linéaire correspondant : soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$. On a la chaîne d'équivalences

$$\begin{aligned} (x, y, z) = \lambda a + \mu b &\Leftrightarrow \begin{cases} -\lambda &= x \\ 2\lambda + \mu &= y \\ \lambda - \mu &= z \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda &= -x \\ 2\lambda + \mu &= y \\ \lambda - \mu &= z \end{cases} && [L_1 \leftarrow -L_1] \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda &= -x \\ \mu &= 2x + y \\ -\mu &= x + z \end{cases} && \begin{bmatrix} L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{bmatrix} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda &= -x \\ \mu &= 2x + y \\ 0 &= 3x + y + z. \end{cases} && [L_3 \leftarrow L_3 + L_2] \end{aligned}$$

Le système est alors sous forme échelonnée réduite. On constate que l'équation de compatibilité (la troisième) est simplement $0 = 0$ (compte tenu de l'hypothèse faite sur (x, y, z)). Il y a alors deux inconnues principales et zéro inconnue secondaire, d'où l'on tire l'ensemble de solutions

$$\mathcal{S} = \left\{ \begin{pmatrix} -x \\ 2x + y \end{pmatrix} \right\}.$$

On a donc montré l'équivalence

$$(x, y, z) = \lambda a + \mu b \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ 2x + y \end{pmatrix}.$$

En particulier, $(x, y, z) = -xa + (2x + y)b$ est bien un élément de $\text{Vect}(a, b)$, ce qui montre l'inclusion réciproque et conclut la preuve.

Autocorrection C.

Déjà, les huit ensembles de l'énoncé sont bien des sous-espaces vectoriels : ils sont donnés, soit comme des sous-espaces vectoriels engendrés par une famille de vecteurs, soit comme des noyaux de matrices : par exemple, le premier est $\ker \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ et le dernier, $\ker \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

- (i) On peut voir l'équation définissant le sous-espace vectoriel (ici, $x + 2y - z = 0$) comme un système linéaire (à une équation) et le résoudre suivant les méthodes générales. C'est particulièrement facile ici, le système linéaire étant déjà sous forme échelonnée réduite :

$$\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2y - z = 0 \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} -2y + z \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid y, z \in \mathbb{R} \right\}.$$

On en déduit

$$\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2y - z = 0 \right\} = \left\{ y \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mid y, z \in \mathbb{R} \right\} = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

La famille de deux vecteurs est bien sûr libre, car les vecteurs ne sont manifestement pas colinéaires.

- (ii) En procédant comme à la question précédente,

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid -2x + 2y - 3z = 0 \right\} &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x - y + \frac{3}{2}z = 0 \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} y - \frac{3}{2}z \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid y, z \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \left\{ y \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} -3/2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mid y, z \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3/2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right), \end{aligned}$$

et la famille est encore libre, pour le même argument.

- (iii) Expliquons une méthode systématique. Notons $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $v = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}$.

Soit $w = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$. On a la chaîne d'équivalences

$$w \in \text{Vect}(u, v) \Leftrightarrow \exists \lambda, \mu \in \mathbb{R} : w = \lambda u + \mu v$$

$$\Leftrightarrow \exists \lambda, \mu \in \mathbb{R} : \begin{cases} \lambda + 2\mu = x \\ 2\lambda + 3\mu = y \\ -\lambda - 3\mu = z \end{cases}$$

Ainsi, $w \in \text{Vect}(u, v)$ si et seulement si le système linéaire $\begin{cases} \lambda + 2\mu = x \\ 2\lambda + 3\mu = y \\ -\lambda - 3\mu = z \end{cases}$ d'inconnues λ, μ , est compatible.

On peut alors appliquer le pivot de Gauss.

$$\begin{aligned}
\begin{cases} \lambda + 2\mu = x \\ 2\lambda + 3\mu = y \\ -\lambda - 3\mu = z \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda + 2\mu = x \\ -\mu = -2x + y \\ -\mu = x + z \end{cases} && \begin{cases} [L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1] \\ [L_3 \leftarrow L_3 + L_1] \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda + 2\mu = x \\ \mu = 2x - y \\ -\mu = x + z \end{cases} && [L_2 \leftarrow -L_2] \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = -3x + 2y \\ \mu = 2x - y \\ 0 = 3x - y + z. \end{cases} && \begin{cases} [L_1 \leftarrow L_1 - 2L_2] \\ [L_3 \leftarrow L_3 + L_2] \end{cases}
\end{aligned}$$

Ce système linéaire est compatible si et seulement si son équation de compatibilité est triviale, c'est-à-dire si et seulement si $3x - y + z = 0$.

Cela démontre

$$\text{Vect}(u, v) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid 3x - y + z = 0 \right\}.$$

(iv) Par la même méthode qu'à la question précédente, on obtient

$$\text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x + y - 2z = 0 \right\}.$$

(v) On résout le système. Pour tout $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$, on a la chaîne d'équivalences

$$\begin{aligned}
\begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2x + y - z = 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z = 0 \\ -y - 3z = 0 \end{cases} && [L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1] \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z = 0 \\ y + 3z = 0 \end{cases} && [L_2 \leftarrow -L_2] \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} x - 2z = 0 \\ y + 3z = 0 \end{cases} && [L_1 \leftarrow L_1 - L_2]
\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}
\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 2x + y - z = 0 \right\} &= \left\{ \begin{pmatrix} 2z \\ -3z \\ z \end{pmatrix} \mid z \in \mathbb{R} \right\} \\
&= \left\{ z \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \mid z \in \mathbb{R} \right\} = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \right).
\end{aligned}$$

(vi) On procède de même : après résolution, on obtient

$$\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid \begin{cases} x - 2z = 0 \\ x + 3y - 2z = 0 \end{cases} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid \begin{cases} x - 2z = 0 \\ 3y = 0 \end{cases} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 2z \\ 0 \\ z \end{pmatrix} \mid z \in \mathbb{R} \right\} = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

Dans l'autre sens, le plus simple est sans doute de trouver deux équations (non triviales et non trivialement équivalentes) vérifiées par le vecteur donné, puis de refaire le même genre de calculs que plus haut pour vérifier l'égalité.

Attention ! chaque question a une infinité de réponses possibles, et il n'est pas nécessairement évident de passer de l'une à l'autre. Si vos deux équations ne sont pas proportionnelles et que le vecteur donné en est solution, votre réponse est correcte. Voici donc des réponses parmi d'autres (on a choisi celles qui donnaient des systèmes linéaires échelonnés).

$$(vii) \text{ Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x + z = y + 2z = 0 \right\}.$$

$$(viii) \text{ Vect} \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix} \right) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x + \frac{2}{3}z = y + z = 0 \right\}.$$

Autocorrection D.

$$(i) \text{ Il s'agit de montrer que le système homogène } \begin{cases} \lambda + 4\mu + 2\nu = 0 \\ 2\lambda + 5\mu + \nu = 0 \\ 3\lambda + 6\mu + \nu = 0 \end{cases} \text{ n'a que la solution triviale.}$$

D'après le cours sur les systèmes linéaires, cela est équivalent à l'inversibilité de la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 2 & 5 & 1 \\ 3 & 6 & 1 \end{pmatrix} \text{ (qui possède les vecteurs } a, b \text{ et } c \text{ comme colonnes).}$$

$$(ii) \text{ Il s'agit de montrer que le système } \begin{cases} 2\lambda - \mu = 3 \\ \lambda = 7 \\ \lambda + \mu = 4 \end{cases} \text{ n'a pas de solution.}$$

$$(iii) \text{ Il s'agit de montrer que le système } \begin{cases} \lambda + 3\mu - \nu = x \\ \lambda + 7\mu = y \\ \lambda + 4\mu + \nu = z \end{cases} \text{ a des solutions, quelles que soient les valeurs des paramètres } x, y \text{ et } z \in \mathbb{R}.$$

D'après le cours sur les systèmes linéaires, cela est équivalent à l'inversibilité de la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 1 & 7 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Remarque. En comparant cette réponse et la réponse de la première question, on voit que pour trois vecteurs dans $\mathbb{R}^3$ (ou, plus généralement, pour n vecteurs dans K^n), la liberté et l'aspect générateur sont équivalents, et se ramènent tous les deux à l'inversibilité d'une matrice construite « en colonnes » à partir des trois vecteurs.

Ce résultat est un cas particulier d'un théorème plus général que l'on verra dans le cours sur la dimension.

$$(iv) \text{ Il s'agit de montrer que pour tous } x, y \in \mathbb{R}, \text{ le système } \begin{cases} \lambda + 4\mu - \nu = x + 2y \\ 2\lambda + 5\mu = x \\ 3\lambda + 6\mu + \nu = x - 2y \end{cases} \text{ d'inconnues } \lambda, \mu \text{ et } \nu, \text{ a des solutions.}$$

Par stabilité par combinaison linéaire, on peut aussi réécrire cette condition en demandant que $d \in \text{Vect}(a, b, f)$ et $g \in \text{Vect}(a, b, f)$. Autrement dit, il revient au même de demander que les

deux systèmes linéaires

$$\begin{cases} \lambda + 4\mu - \nu = 1 \\ 2\lambda + 5\mu = 1 \\ 3\lambda + 6\mu + \nu = 1 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \lambda + 4\mu - \nu = 2 \\ 2\lambda + 5\mu = 0 \\ 3\lambda + 6\mu + \nu = -2 \end{cases}$$

sont compatibles.

(v) Il s'agit de trouver toutes les solutions du système linéaire homogène $\begin{cases} \lambda + 4\mu + 2\nu + \xi = 0 \\ 2\lambda + 5\mu + \nu + \xi = 0 \\ 3\lambda + 6\mu + \nu + \xi = 0. \end{cases}$

Autocorrection E.

1. Soit $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ un vecteur. Soit λ, μ, ν trois réels. On a la chaîne d'équivalences

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &= \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \nu \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\lambda + \mu + \nu \\ \lambda - \mu + \nu \\ \lambda + \mu - \nu \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} -\lambda + \mu + \nu = x \\ \lambda - \mu + \nu = y \\ \lambda + \mu - \nu = z \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = \frac{y+z}{2} \\ \mu = \frac{x+z}{2} \\ \nu = \frac{x+y}{2} \end{cases} \quad \text{[après résolution]} \end{aligned}$$

Cela démontre que tout vecteur de $\mathbb{R}^3$ s'écrit d'une unique façon comme combinaison linéaire des trois vecteurs considérés.

On sait que cela est équivalent au fait que $\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$ soit une base de $\mathbb{R}^3$.

En appliquant le calcul précédent au vecteur $\begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ -2 \end{pmatrix}$, on obtient que les coordonnées du vecteur dans notre base sont $(5/2, 1/2, 5)$, c'est-à-dire que l'on a la décomposition

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ -2 \end{pmatrix} = \frac{5}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + 5 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

2. Naturellement, la famille (u, v, w) engendre $F = \text{Vect}(u, v, w)$, où l'on a noté $u = (1, -1, 1)$, $v = (0, -1, 2)$ et $w = (1, -2, 3)$.

On peut se demander si cette famille est libre. Après calcul ou à tâtons, on montre que la famille est en fait liée, car $u + v - w = 0$.

On a donc $u, v, w \in \text{Vect}(u, v)$ (c'est trivial pour les deux premiers, et cela provient de l'expression $w = u + v$ pour le dernier). Le sous-espace vectoriel $\text{Vect}(u, v)$ contient donc les trois vecteurs u, v et w , ce qui montre l'inclusion $\text{Vect}(u, v, w) \subseteq \text{Vect}(u, v)$. L'autre inclusion étant claire, on a montré

$$F = \text{Vect}(u, v).$$

On peut recommencer le procédé en se demandant si la famille (u, v) est libre. Comme il s'agit d'une famille de deux vecteurs, il suffit de remarquer que les deux vecteurs ne sont pas colinéaires pour en conclure qu'effectivement (u, v) est une famille libre.

D'après ce qui précède, (u, v) est une base de F .

Pour terminer la question, notons $G = \{(x, y, z) \in K^3 \mid x + 2y + z = 0\}$. On vérifie alors successivement et facilement

- que u et v appartiennent à G
- et que G est un sous-espace vectoriel de K^3 : $G = \ker \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Par stabilité par combinaison linéaire, on a donc $F = \text{Vect}(u, v) \subseteq G$.

Pour le sens réciproque, soit $(x, y, z) \in G$. On a donc $x - y + 2z = 0$. Cherchons à exprimer (x, y, z) comme combinaison linéaire de u et v . Soit $\lambda, \mu \in K$ deux scalaires. On a la chaîne d'équivalences

$$\begin{aligned} (x, y, z) = \lambda u + \mu v &\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = x \\ -\lambda - \mu = y \\ \lambda + 2\mu = z \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = x \\ -\mu = x + y \\ 2\mu = -x + z \end{cases} \quad \begin{matrix} [L_2 \leftarrow L_2 + L_1] \\ [L_3 \leftarrow L_3 - L_1] \end{matrix} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = x \\ \mu = -x - y \\ 2\mu = -x + z \end{cases} \quad [L_2 \leftarrow -L_2] \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = x \\ \mu = -x - y \\ 0 = x + 2y + z \end{cases} \quad [L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2]. \end{aligned}$$

Le système est désormais sous forme échelonnée. Vu l'hypothèse sur (x, y, z) , l'équation de compatibilité est $0 = 0$. Il y a alors deux inconnues principales et zéro secondaire, ce qui fournit une unique solution.

$$\mathcal{S} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ -x - y \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Il est donc possible d'exprimer (x, y, z) comme combinaison linéaire de u et v , ce qui montre l'inclusion $G \subseteq F$ qui nous manquait.

3. Résolvons l'équation $x - y + 2z = 0$, comme un système linéaire (à une équation). Il est déjà sous forme échelonnée réduite, avec x comme inconnue principale et y et z comme inconnues secondaires. On a donc

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{C}^3 \mid x - y + 2z = 0\} = \left\{ \begin{pmatrix} y - 2z \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid (y, z) \in \mathbb{C}^2 \right\}.$$

Comme, pour tous y et z , le vecteur $\begin{pmatrix} y - 2z \\ y \\ z \end{pmatrix}$ s'écrit comme une combinaison linéaire

$$\begin{pmatrix} y - 2z \\ y \\ z \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

on voit que l'espace vectoriel de l'énoncé s'écrit sous la forme $\text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$.

Comme les deux vecteurs ne sont pas colinéaires, la famille $\text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ est en outre libre, donc elle est une base du sous-espace vectoriel considéré.

4. Résolvons le système naturellement donné dans l'énoncé. Soit $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$. Pour simplifier les calculs, on va s'affranchir légèrement du pivot de Gauss en mettant le système sous une forme « presque échelonnée réduite » où l'on va privilégier les inconnues y et z , malgré le fait que ce ne soit pas les inconnues correspondant aux colonnes de gauche. On a l'équivalence

$$\begin{cases} 3x - 2y + z - 2t = 0 \\ 2x + y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7x + z - 2t = 0 \\ 2x + y = 0, \end{cases} \quad [L_1 \leftarrow L_1 + 2L_2]$$

vers un système échelonné réduit (mais pas pour l'ordre usuel des colonnes de gauche à droite), avec y et z comme inconnues principales et x et t des inconnues secondaires. Cela nous donne l'ensemble de solutions

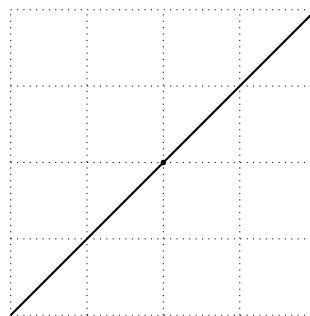
$$\mathcal{S} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ -2x \\ -7x + 2t \\ t \end{pmatrix} \middle| (x, t) \in \mathbb{R}^2 \right\} = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -7 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

Comme les deux vecteurs ne sont pas colinéaires, la famille $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -7 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ est en outre libre, donc elle est une base du sous-espace vectoriel considéré.

Autocorrection F.

À chaque question, on note F l'ensemble décrit dans l'énoncé.

- (i) Oui. Proposons deux méthodes pour le vérifier.



Première méthode : par la définition. Vérifions les trois axiomes.

- Comme $0 = 0$, on a $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in F$.
- Soit $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \in F$. On a donc $x_1 = y_1$ et $x_2 = y_2$.

On a alors $x_1 + x_2 = y_1 + y_2$, ce qui montre que $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \end{pmatrix} \in F$.

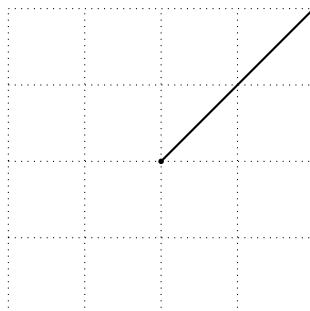
- Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in F$. On a donc $x = y$.

On a alors $\lambda x = \lambda y$, ce qui montre que $\lambda \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x \\ \lambda y \end{pmatrix} \in F$.

Deuxième méthode, plus rapide. On constate que $F = \ker \begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix}$. C'est donc un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$.

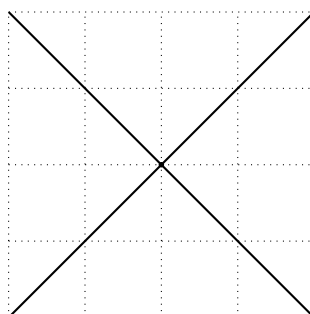
Dans les questions suivantes, quand la réponse est « oui », on pourrait à chaque fois sans difficulté revenir à la définition, mais on cherchera à chaque fois une réponse plus rapide.

(ii) Non : $(1, 1) \in F$ mais $(-1, -1) \notin F$.

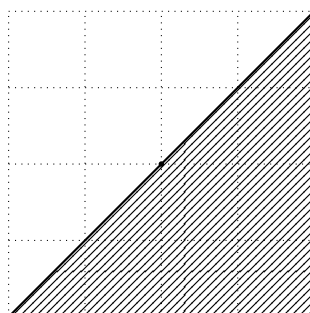


(iii) Oui : on vérifie que F est en fait le singleton $\{(0, 0)\}$.

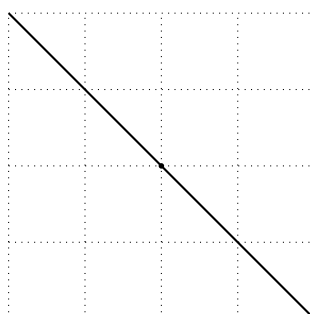
(iv) Non : $(1, 1) \in F$ et $(1, -1) \in F$, mais $(1, 1) + (1, -1) \notin F$.



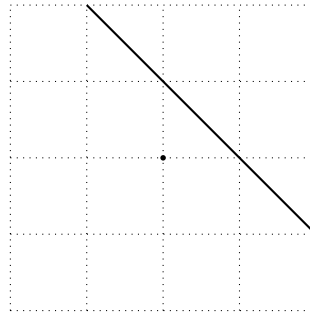
(v) Non : $(1, 0) \in F$ mais $(-1, 0) \notin F$.



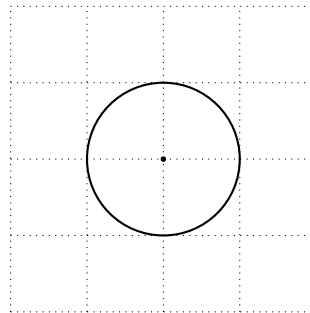
(vi) Oui : on constate que $F = \ker \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}$.



(vii) Non : $(0, 0) \notin F$.



(viii) Non : $(0, 0) \notin F$.



(ix) Oui : on vérifie que F est en fait le singleton $\{(0, 0)\}$.

(x) Oui : on vérifie que F est en fait $\mathbb{R}^2$ tout entier.

Autocorrection G.

À chaque question, on note F l'ensemble décrit dans l'énoncé.

(i) Oui : on constate que $F = \ker \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$.

Le sous-espace vectoriel F est ici un plan.

(ii) Non : $(0, 0, 0) \notin F$.

L'ensemble F est ici un plan, mais ne passant pas par l'origine.

(iii) Oui : on constate que $F = \ker \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & -4 \end{pmatrix}$.

Le sous-espace vectoriel F est ici une droite.

(iv) Oui : on constate que $F = \ker \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -3 \end{pmatrix}$.

Le sous-espace vectoriel F est ici une droite.

(v) Oui : on constate que $F = \text{Vect} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Le sous-espace vectoriel F est ici une droite.

(vi) Non : $(0, 1, 1) \in F$ et $(1, 0, 1) \in F$, mais $(1, 1, 2) = (0, 1, 1) + (1, 0, 1) \notin F$.

L'ensemble F est ici l'union des trois plans « de coordonnées ».

Autocorrection H.

Soit $\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$.

Montrons que tout vecteur de $\mathbb{R}^3$ s'écrit de manière unique comme combinaison linéaire des vecteurs de la famille $\mathcal{B}$.

Pour cela, soit $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$. Soit $\lambda, \mu, \nu \in \mathbb{R}$. On a la chaîne d'équivalences

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \nu \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} &\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda + \nu = x \\ \lambda + \mu + \nu = y \\ \mu + \nu = z \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda + \nu = x \\ \mu = y - x \\ \mu + \nu = z \end{cases} & [L_2 \leftarrow L_2 - L_1] \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda + \nu = x \\ \mu = -x + y \\ \nu = x - y + z \end{cases} & [L_3 \leftarrow L_3 - L_2] \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = y - z \\ \mu = -x + y \\ \nu = x - y + z \end{cases} & [L_1 \leftarrow L_1 - L_3]. \end{aligned}$$

Puisque tout élément de $\mathbb{R}^3$ s'écrit de manière unique comme combinaison linéaire des éléments de $\mathcal{B}$, on en déduit que $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

On a donc une décomposition en somme directe

$$\mathbb{R}^3 = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \oplus \text{Vect} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = F \oplus G.$$

On a donc

$$F \cap G = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \quad \text{et} \quad F + G = \mathbb{R}^3.$$