

Espaces vectoriels

Espaces vectoriels

Exercice 1.

On définit sur $\mathbb{R}^2$ les opérations $+$ et $\cdot$ par

- Pour (x, y) et $(x', y') \in \mathbb{R}^2$, $(x, y) + (x', y') = (x + x', y + y')$.
- Pour $\lambda \in \mathbb{R}$ et $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $\lambda \cdot (x, y) = (\lambda x, 0)$.

Ces lois munissent-elles $\mathbb{R}^2$ d'une structure d'espace vectoriel ?

Exercice 2.

On définit sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ les opérations $+$ et $\cdot$ par

- Pour (x, y) et $(x', y') \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$, $(x, y) + (x', y') = (xx', y + y')$.
- Pour $\lambda \in \mathbb{R}$ et $(x, y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$, $\lambda \cdot (x, y) = (x^\lambda, \lambda y)$.

Ces lois munissent-elles $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ d'une structure d'espace vectoriel ?

Exercice 3⁺.

Munir $] -1, 1[$ d'une structure de $\mathbb{R}$ -espace vectoriel.



Familles de vecteurs

Autocorrection A.



1. Le vecteur $(3, 3, 1) \in \mathbb{R}^3$ est-il combinaison linéaire des vecteurs $(1, 2, 0)$ et $(2, 1, 0)$?
2. Le vecteur $(3, 3, 1) \in \mathbb{R}^3$ est-il combinaison linéaire des vecteurs $(1, 2, 0)$ et $(1, 1, 1)$?
3. La fonction $(x \mapsto \cos(2x)) \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ est-elle combinaison linéaire des fonctions $\cos$ et $\sin$?
4. Quelles suites sont combinaisons linéaires des suites $(1)_{n \in \mathbb{N}}$ et $((-1)^n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$?

Autocorrection B.



On définit $a = (-1, 2, 1)$, $b = (0, 1, -1)$, $u = (1, 0, -3)$ et $v = (-2, 5, 1)$ quatre vecteurs de $\mathbb{R}^3$.

1. Déterminer un vecteur $w \in \mathbb{R}^3$ n'appartenant pas à $\text{Vect}(a, b)$.
2. Montrer que $\text{Vect}(a, b) = \text{Vect}(u, v)$.
3. Trouver trois réels α, β et γ non tous nuls tels que $\forall (x, y, z) \in \text{Vect}(a, b)$, $\alpha x + \beta y + \gamma z = 0$.
4. Montrer que $\text{Vect}(a, b) = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \alpha x + \beta y + \gamma z = 0 \right\}$.

Autocorrection C. ✓

Voici une liste de sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ donnés soit comme sous-espace vectoriel engendré par une famille libre, soit comme ensemble de vecteurs vérifiant une ou deux équations linéaires. Pour chacun d'entre eux, donner une description de l'autre type.

- | | |
|---|---|
| (i) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2y - z = 0\};$ | (v) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 2x + y - z = 0\};$ |
| (ii) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid -2x + 2y - 3z = 0\};$ | (vi) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - 2z = x + 3y - 2z = 0\};$ |
| (iii) $\text{Vect}((1, 2, -1), (2, 3, -3));$ | (vii) $\text{Vect}(1, 2, -1);$ |
| (iv) $\text{Vect}((1, 1, 1), (1, -1, 0));$ | (viii) $\text{Vect}(2, 3, -3).$ |

Exercice 4.

- Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, montrer que l'on a $\text{Vect}(\text{ch}, \text{sh}) = \text{Vect}(\exp, x \mapsto \exp(-x))$.
- Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^{[-1,1]}$, montrer que le sous-espace vectoriel $\text{Vect}(x \mapsto \cos(2x), \cos^2, \sin^2)$ peut s'obtenir comme $\text{Vect}(f, g)$, pour deux fonctions $f, g \in \mathbb{R}^{[-1,1]}$ bien choisies.

Exercice 5.

- Soit $A \in M_2(K)$. Montrer que $A^2 \in \text{Vect}(I_2, A)$.
- Donner un exemple de matrice $A \in M_3(K)$ telle que $A^2 \notin \text{Vect}(I_3, A)$.

Familles libres, génératrices, bases**Autocorrection D.** ✓

On considère les vecteurs de $\mathbb{R}^3$ suivants.

$$a = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad d = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad e = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad f = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad g = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Pour chacune des questions suivantes, indiquez ce qu'il faudrait vérifier pour répondre à la question, sous la forme :

$$\text{Il s'agit de} \left\{ \begin{array}{l} \text{montrer que le système } \begin{cases} \dots = \dots \\ \dots = \dots \end{cases} \text{ a des solutions / a une unique solution / n'a pas de solution.} \\ \text{trouver toutes les solutions du système } \begin{cases} \dots = \dots \\ \dots = \dots \end{cases} \\ \dots \text{ (liste non exhaustive).} \end{array} \right.$$

On ne cherchera pas à faire les calculs.

- Montrer que la famille (a, b, c) est libre.
- Montrer que $e \notin \text{Vect}(c, f)$.
- Montrer que (d, e, f) est génératrice de $\mathbb{R}^3$.
- Montrer que $\text{Vect}(d, g) \subseteq \text{Vect}(a, b, f)$.
- Déterminer toutes les relations de liaison entre a, b, c et d .

Autocorrection E. ☒

1. Montrer que $((-1, 1, 1), (1, -1, 1), (1, 1, -1))$ est une base de $\mathbb{R}^3$ et déterminer les coordonnées de $(3, 7, -2)$ dans cette base.
2. On définit $F = \text{Vect}((1, -1, 1), (0, -1, 2), (1, -2, 3)) \subseteq \mathbb{K}^3$. En donner une base et montrer que $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{K}^3 \mid x + 2y + z = 0\}$.
3. Donner une base de $\{(x, y, z) \in \mathbb{C}^3 \mid x - y + 2z = 0\}$.
4. Donner une base de $\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid 3x - 2y + z - 2t = 0 \text{ et } 2x + y = 0\}$.

Exercice 6. ☒

Soit $n \geq 2$. Soit E un espace vectoriel de base $(e_1, e_2, \dots, e_n)$.

Montrer que la famille $(e_1 + e_2, e_2 + e_3, \dots, e_{n-1} + e_n)$ est libre.

Exercice 7. ☒

Soit E un espace vectoriel possédant une famille libre $(e_1, \dots, e_n)$ et $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$.

On note $u = \sum_{k=1}^n \lambda_k e_k$ et, pour $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $v_i = u + e_i$.

Montrer que la famille $(v_1, \dots, v_n)$ est liée si et seulement si $\sum_{k=1}^n \lambda_k = -1$.

Exercice 8. ☒

1. Montrer que les suites $(1)_{n \in \mathbb{N}}$, $(n^2)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(2^n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ sont linéairement indépendantes.
2. Montrer que les fonctions $\cos$, $\sin$ et $\exp$ sont linéairement indépendantes.

Exercice 9⁺. ☒

Soit $N \in \mathbb{N}$.

1. Montrer que $(\cos^n)_{n=0}^N$ est libre.
2. Montrer que $\text{Vect}\left((\cos^n)_{n=0}^N\right) = \text{Vect}\left((x \mapsto \cos(nx))_{n=0}^N\right)$.
3. En déduire que $(x \mapsto \cos(nx))_{n=0}^N$ est libre.

Exercice 10⁺. ☒

Soit $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ des réels distincts.

1. Montrer que la famille $(x \mapsto e^{\alpha_i x})_{i=1}^n$ est libre.
2. Montrer que la famille $(x \mapsto |x - \alpha_i|)_{i=1}^n$ est libre.

Exercice 11. ☒

Construire une famille libre infinie de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

Exercice 12. ☒

Soit $f \in C^0(\mathbb{R})$. À quelle condition la famille $(f^n)_{n \in \mathbb{N}}$ est-elle liée ?

Exercice 13⁺. ☒

Peut-on trouver une base de $M_n(\mathbb{R})$ composée de matrices inversibles ?

Sous-espaces vectoriels

Autocorrection F.



Les parties suivantes de $\mathbb{R}^2$ en sont-elles des sous-espaces vectoriels ?

- | | |
|---|--|
| (i) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = y\};$ | (vi) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y = 0\};$ |
| (ii) $\{(x, y) \in (\mathbb{R}_+)^2 \mid x = y\};$ | (vii) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y = 1\};$ |
| (iii) $\{(x, y) \in (\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_-) \mid x = y\};$ | (viii) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\};$ |
| (iv) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = y \};$ | (ix) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 0\};$ |
| (v) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq y\};$ | (x) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \geq 0\}.$ |

Autocorrection G.



Les parties suivantes de $\mathbb{R}^3$ en sont-elles des sous-espaces vectoriels ?

- | | |
|--|---|
| (i) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x + 3y + 4z = 0\};$ | (iv) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \begin{matrix} x + 2y - z = 0 \\ 2x + y - 3z = 0 \end{matrix}\};$ |
| (ii) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2y - z + 1 = 0\};$ | (v) $\{(x, 2x, 3x) \mid x \in \mathbb{R}\};$ |
| (iii) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = 2y = 4z\};$ | (vi) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid xyz = 0\}.$ |

Exercice 14.



Soit $n \geq 2$. Les parties suivantes de $\mathbb{R}^n$ en sont-elles des sous-espaces vectoriels ?

- | | |
|---|--|
| (i) $\{(0, 0, \dots, 0)\};$ | (iv) $\{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^n 2^i x_i = 0\};$ |
| (ii) $\{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^n x_i = 0\};$ | (v) l'ensemble des n -uplets ayant au plus une coordonnée non nulle; |
| (iii) $\{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^n x_i = 1\};$ | (vi) $\mathbb{Z}^n$. |

Exercice 15.

Les parties suivantes de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ en sont-elles des sous-espaces vectoriels ?

- | | |
|---|--|
| (i) l'ensemble des suites croissantes; | (vii) l'ensemble des suites convergeant vers 0; |
| (ii) l'ensemble des suites monotones; | (viii) l'ensemble des suites convergeant vers 1; |
| (iii) l'ensemble des suites minorées; | (ix) l'ensemble des suites constantes; |
| (iv) l'ensemble des suites bornées; | (x) l'ensemble des suites stationnaires; |
| (v) l'ensemble des suites convergentes; | (xi) l'ensemble des suites 12-périodiques; |
| (vi) l'ensemble des suites divergentes; | (xii) l'ensemble des suites périodiques. |

Exercice 16.

Les parties suivantes de $\mathbb{R}[X]$ en sont-elles des sous-espaces vectoriels ? ($P \in \mathbb{R}[X]$ et $n \in \mathbb{N}$ sont fixés.)

- l'ensemble des polynômes de degré n ;
- l'ensemble des polynômes admettant 0 et 1 comme racines;
- l'ensemble des polynômes admettant au moins deux racines;
- $\{PQ \mid Q \in \mathbb{R}[X]\};$
- $\{Q \in \mathbb{R}[X] \mid \exists R \in \mathbb{R}[X] : QR = P\}.$

Exercice 17. _____ 

Les parties suivantes de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ en sont-elles des sous-espaces vectoriels ? ($x_0, y_0 \in \mathbb{R}$ étant fixés.)

- (i) l'ensemble des fonctions croissantes;
- (ii) l'ensemble des fonctions monotones;
- (iii) l'ensemble des fonctions qui s'écrivent comme différence de deux fonctions croissantes;
- (iv) $\{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ dérivables} \mid f(0) + f(1) = f'(0)\}$;
- (v) $\{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid f(x_0) = y_0\}$;
- (vi) $\{x \mapsto A \cos(x + \varphi) \mid A, \varphi \in \mathbb{R}\}$;
- (vii) l'ensemble des fonctions ne prenant qu'un nombre fini de valeurs.

Exercice 18. _____ 

Soit $E \subseteq K^n$ un sous-espace vectoriel tel que $\forall x \in E \setminus \{0\}, \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, x_i \neq 0$.

Montrer qu'il existe $v \in E$ tel que $E = \text{Vect}(v)$.

Exercice 19⁺. _____

1. Déterminer $\text{Vect} \left\{ f \in C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid f \geq 0 \right\}$.
2. Déterminer $\text{Vect} \{P \in \mathbb{R}[X] \mid \forall x \in \mathbb{R}, P(x) \geq 0\}$.

Exercice 20⁺. _____

Soit F un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel E . Déterminer $\text{Vect}(E \setminus F)$.

Exercice 21⁺. _____ 

Soit E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel et $F, G \subseteq E$ deux sous-espaces vectoriels.

Montrer que $F \cup G$ n'est un sous-espace vectoriel de E que si $F \subseteq G$ ou $G \subseteq F$.

Bases de sous-espaces vectoriels

Exercice 22 (Sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^2$). _____

1. Soit $u = \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}, w = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$.

Traduire la question « w est-il combinaison linéaire de u et v ? » en termes de systèmes linéaires.

2. Montrer que si u et v ne sont pas colinéaires, alors la famille (u, v) engendre $\mathbb{R}^2$.
3. En déduire une classification de tous les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^2$.

Exercice 23. _____

Déterminer si les familles suivantes sont des bases de $K_2[X]$ et, le cas échéant, déterminer les coordonnées de $X^2 + X + 1$ dans cette base.

- (i) $(1, X - 1, (X - 1)^2)$;
- (ii) $(X^2 + X, X^2 + 1, X + 1)$;
- (iii) $((X - 1)^2, X^2, (X + 1)^2)$.

Exercice 24⁺. _____  

Soit $a \neq b \in \mathbb{C}$. Montrer que $((X - a)^k (X - b)^{n-k})_{k \in \llbracket 0, n \rrbracket}$ est une base de $\mathbb{C}_n[X]$.

Exercice 25⁺. _____ 

1. Soit E un espace vectoriel et $(x_1, \dots, x_p)$ une famille génératrice de E . Notons

$$J = \{j \in \llbracket 1, p \rrbracket \mid x_j \notin \text{Vect}(x_1, \dots, x_{j-1})\}.$$

Montrer que $(x_j)_{j \in J}$ est une base de E .

2. On considère la famille $\mathcal{F} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right)$ de vecteurs de $\mathbb{R}^3$ et le sous-espace vectoriel $V = \text{Vect}(\mathcal{F})$. En utilisant la question précédente, donner une base de V .

Exercice 26. _____ 

Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, on définit $P_k = (X + 1)^{k+1} - X^{k+1} \in K_n[X]$.

Montrer que $(P_0, P_1, \dots, P_n)$ est une base de $K_n[X]$.

Exercice 27⁺. _____

Soit E un sous-espace vectoriel de $K_n[X]$.

- Montrer qu'il existe une base de E constituée de polynômes de degrés tous différents.
- Montrer qu'il existe une base de E constituée de polynômes de même degré.

Sommes et intersections

Autocorrection H. _____ 

On définit les sous-espaces vectoriels $F = \text{Vect}((1, 1, 0), (0, 1, 1))$ et $G = \text{Vect}(1, 1, 1)$ de $\mathbb{R}^3$. Déterminer $F \cap G$ et $F + G$.

Exercice 28. _____ 

Soit $n \geq 2$. On note $F = \text{Vect} \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ et $G = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{k=1}^n x_k = 0 \right\}$.

Montrer que F et G sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires dans $\mathbb{R}^n$.

Exercice 29. _____

On définit

$$E = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \mid x - y + z - t = 0 \right\}, \quad F = \text{Vect} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \text{et} \quad G = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \mid x + z = y + t = 0 \right\}.$$

Montrer que $E = F \oplus G$.

Exercice 30. _____ 

Montrer que $\{P \in \mathbb{R}_3[X] \mid P(X^2) = X^2 P(X)\}$ et $\{P \in \mathbb{R}_3[X] \mid P(1) = P(2)\}$ sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de $\mathbb{R}_3[X]$.

Exercice 31.

1. Soit E l'ensemble des suites réelles convergentes. Montrer que l'ensemble des suites constantes et l'ensemble des suites convergeant vers 0 sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires dans E .
2. Soit E l'ensemble des fonctions dérivables en 0. Montrer que $F = \{f \in E \mid f(0) = 0 \text{ et } f'(0) = 0\}$ et l'ensemble des fonctions affines sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E . Généraliser.

Exercice 32.

Soit $E = C^0(\mathbb{R})$. Montrer que

$$E = \text{Vect}(\cos, \sin) \oplus \left\{ f \in E \mid f(0) = f\left(\frac{\pi}{2}\right) = f(\pi) \right\}.$$

Exercice 33.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $\left\{ f \in C^\infty(\mathbb{R}) \mid f(x) = o_{x \rightarrow 0}(x^n) \right\}$ est un sous-espace vectoriel de $C^\infty(\mathbb{R})$, et en trouver un supplémentaire.

Exercice 34.



Soit E un espace vectoriel, $y_1, \dots, y_r \in E$ (avec $r \geq 1$) et F un sous-espace vectoriel de E .

On suppose que $\forall i \in \llbracket 1, r \rrbracket, y_i \notin F$. Que peut-on en déduire sur $\text{Vect}(y_1, \dots, y_r) \cap F$?

Exercice 35.

Soit A, B et C trois parties d'un espace vectoriel E .

1. Comparer $\text{Vect}(B \cup C)$ et $\text{Vect}(B) + \text{Vect}(C)$.
2. Comparer $\text{Vect}(A)$ et $\text{Vect}(A \cup B) \cap \text{Vect}(A \cup C)$.

Exercice 36.

Soit E un K -espace vectoriel et $A, B, C \subseteq E$ trois sous-espaces vectoriels de E . Montrer les propriétés suivantes.

1. $A \cap B = A + B \Leftrightarrow A = B$.
2. $(A \cap B) + (A \cap C) \subseteq A \cap (B + C)$. Montrer que l'inclusion peut être stricte.
3. $B \subseteq A \Rightarrow (A \cap B) + (A \cap C) = A \cap (B + C)$.

Exercice 37.



Soit F, G, H trois sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E tels que $(F \cap G) \oplus H = G$.

Montrer que $F + G = F \oplus H$.

Exercice 38.

Soit F, G et H trois sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E .

On suppose que $F \oplus G$ et H sont en somme directe. Montrer que F et $G \oplus H$ sont en somme directe.

Exercice 39⁺.

Soit F, G et H trois sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E tels que $F + H = G + H, F \cap H = G \cap H$, et $F \subseteq G$. Montrer qu'alors $F = G$.

Montrer que la conclusion ne tient pas si l'on omet la troisième hypothèse.