
Limites et continuité

Limites de fonctions
Calculs et opérations
Autocorrection A.


Étudier l'existence et donner la valeur éventuelle des limites suivantes.

- | | |
|---|---|
| (i) $\frac{x \sin(x^2)}{1+x^2}$ en $+\infty$; | (xii) $\frac{\cos(e^x) + 2 \sin(2e^{-x}) + x^2}{\sqrt{1+x^2}}$ en $-\infty$; |
| (ii) $\cos(x^2)$ en $+\infty$; | (xiii) $\frac{\sqrt{ x^3 - 3x + 2 }}{2x^2 - x - 1}$ en 1; |
| (iii) $\sqrt{x} (\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1})$ en $+\infty$; | (xiv) $\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ en $+\infty$; |
| (iv) $(\ln x + \cos x)^2$ en $+\infty$; | (xv) $\frac{\sqrt{x+3} - \sqrt{4x+3}}{\sqrt{x+4} - \sqrt{2x+4}}$ en $+\infty$; |
| (v) $x \left[\frac{1}{x}\right]$ en $+\infty$; | (xvi) $\frac{1}{1-x} - \frac{2}{1-x^2}$ en 1; |
| (vi) $x \left[\frac{1}{x}\right]$ en 0; | (xvii) $\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}$ en 1; |
| (vii) $(1+x)^{\frac{1}{x}}$ en $+\infty$; | (xviii) $\sqrt{x^2 + 2x} - x$ en $+\infty$; |
| (viii) $(1+x)^{\frac{1}{x}}$ en 0; | (xix) $\ln x \ln(\ln x)$ en 1; |
| (ix) $\frac{x^2 + \sin x}{1+x^2}$ en $+\infty$; | (xx) $\frac{1-x}{\arccos x}$ en 1. |
| (x) $\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}} - \sqrt{x}$ en $+\infty$; | |
| (xi) $\left(\frac{\ln(x)}{x}\right)^{\frac{1}{x}}$ en $+\infty$; | |

Exercice 1.

Étudier les limites à gauche et à droite en 0 des fonctions suivantes.

- (i) $x \mapsto \left[\frac{1}{x}\right]$; (ii) $x \mapsto x \left[\frac{1}{x}\right]$; (iii) $x \mapsto x^2 \left[\frac{1}{x}\right]$.

Exercice 2.

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction. Montrer que $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} \ell$ si et seulement si $f(\sin x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} \ell$.

Théorème de la limite monotone
Exercice 3.

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction bijective et croissante. Montrer que $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$.

Exercice 4.


Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ croissante. On suppose qu'il existe une suite $(\xi_n)_n$ telle que $\xi_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$ et $f(\xi_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell \in \overline{\mathbb{R}}$. Montrer que $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \ell$.

Donner un contre-exemple à cette propriété si f n'est plus supposée croissante.

Exercice 5⁺. 💡

Soit $a, b \in \mathbb{R}$ tel que $a < b$ et $f :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ une fonction croissante.

Montrer que l'application $x \mapsto \lim_{\substack{t \rightarrow x \\ t > x}} f(t)$ est bien définie et croissante.

Exercice 6⁺⁺ (Discontinuités d'une fonction monotone). _____

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction monotone. On note D l'ensemble des points $a \in \mathbb{R}$ tels que f n'est pas continue en a . Montrer qu'il existe une injection $D \rightarrow \mathbb{Q}$.

Mélange

Exercice 7. ✓

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction périodique.

Montrer que f possède une limite en $+\infty$ si et seulement si f est constante.

Exercice 8. 💡

Soit $f : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $f\left(\left[\frac{1}{x}\right]^{-1}\right) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$. A-t-on forcément $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$?

Exercice 9⁺. ✓

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ une fonction telle que $f(x) + \frac{1}{f(x)} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 2$. Montrer que $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 1$.

Exercice 10⁺. 💡

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $f(x) f(2x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$.

1. On suppose que f admet une limite en 0. Montrer que cette limite est nulle.
2. Montrer qu'il est possible que f n'admette pas de limite en 0.

Exercice 11⁺. 💡

Soit $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ croissante telle que $f(x+1) - f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$. Montrer que $\frac{f(x)}{x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$.

Continuité

Propriétés locales

Autocorrection B. ✓

Déterminer le domaine de définition, étudier la continuité et les éventuels prolongements par continuité des fonctions suivantes.

(i) $x \mapsto e^{-1/x^2}$;

(ii) $x \mapsto \frac{x \ln x}{x-1}$;

(iii) $x \mapsto \frac{x^2 - 1}{|x - 1|}$;

(iv) $x \mapsto \frac{(x^2 - 1)^2}{|x - 1|}$;

(v) $x \mapsto \sin(x) \sin(1/x)$;

(vi) $x \mapsto \cos(x) \cos(1/x)$.

Exercice 12. ✓

Étudier la continuité de $x \mapsto [x] + (x - [x])^2$.

Exercice 13⁺. 💡

Soit $f : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$. Montrer que si f est croissante et que $x \mapsto \frac{f(x)}{x}$ est décroissante, f est continue.

Un peu de topologie

Exercice 14.

Soit D une partie dense de \mathbb{R} et $f \in C^0(\mathbb{R})$ telle que $f|_D$ soit croissante. Montrer que f est croissante.

Le résultat reste-t-il vrai en remplaçant « croissante » par « strictement croissante » ?

Exercice 15⁺⁺.

1. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Montrer que f est continue si et seulement si $\forall A \in \mathcal{P}(\mathbb{R}), f[\overline{A}] \subseteq \overline{f[A]}$.
2. **Application.** En admettant que $\pi \notin \mathbb{Q}$, montrer que $\{\cos n \mid n \in \mathbb{N}\}$ est dense dans $[-1, 1]$.

Théorème des valeurs intermédiaires

Autocorrection C.

Montrer que l'équation $e^x = \pi^2 \ln(x^2 + 1)$ possède au moins trois solutions réelles.

Exercice 16.

Soit P un polynôme de degré impair. Montrer que $t \mapsto P(t)$ est une application surjective.

Exercice 17.

Soit I un intervalle. Montrer que toute fonction continue $f : I \rightarrow \mathbb{Z}$ est constante.

Exercice 18.

Soit I un intervalle et $f, g \in C^0(I)$ telles que pour tout $x \in I$, on ait $f(x) \neq 0$ et $f(x)^2 = g(x)^2$.

1. Montrer que l'on a $f = g$ ou $f = -g$.
2. Montrer que ce résultat est faux dans chacun des cas suivants :
 - (a) f n'est pas continue ;
 - (b) f s'annule sur I ;
 - (c) I n'est pas un intervalle.

Exercice 19.

Soit $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ continue telle que $|f(x)| \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$.

Montrer que $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$ ou $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} -\infty$.

Exercice 20.

Soit $f : \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow & \mathbb{R} \\ x \mapsto & \begin{cases} \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \end{cases}$

Montrer que f n'est pas continue, mais qu'elle vérifie la conclusion du théorème des valeurs intermédiaires.

Exercice 21.

Soit $a < b$ deux réels et $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue.

1. Montrer que si $f([a, b]) \subseteq [a, b]$ alors f possède un point fixe.
2. Montrer que si $[a, b] \subseteq f([a, b])$ alors f possède un point fixe.

Exercice 22.

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue décroissante. Montrer que f possède un unique point fixe.

Exercice 23.

Soit I un intervalle et $f \in C^0(I)$ telle que $f(I) \subseteq I$. Montrer que si $f \circ f$ possède un point fixe alors il en est de même pour f . Est-ce encore le cas si l'on ne suppose plus f continue?

Exercice 24.

Soit $\ell < 1$ et $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ continue telle que $\frac{f(x)}{x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \ell$. Montrer que f possède un point fixe.

Exercice 25 (Borsuk-Ulam en dimension 1 : une présentation amusante).

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue périodique. Montrer $\forall t \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R} : f(x+t) = f(x)$.

Exercice 26⁺.

Soit $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ continue telle que $f(0) = f(1)$.

1. Montrer que pour tout $n > 0$, il existe $x \in \left[0, 1 - \frac{1}{n}\right]$ telle que $f(x) = f\left(x + \frac{1}{n}\right)$.
2. Montrer que si $\delta \in]0, 1[$ n'est pas l'inverse d'un entier, il est possible que l'équation $f(x+\delta) = f(x)$ n'ait pas de solution.

Exercice 27.

Soit $f :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ continue telle qu'il existe $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$ avec $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \ell$ et $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow b} \ell$.

Montrer que f ne peut pas être injective.

Exercice 28.

Montrer qu'il n'existe pas de fonction continue $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $f \circ f = -\text{id}_{\mathbb{R}}$.

Théorème des bornes atteintes**Exercice 29.**

Soit $f, g \in C^0([a, b])$ telles que $\forall x \in [a, b], f(x) < g(x)$. Montrer que

$$\exists \varepsilon > 0 : \forall x \in [a, b], f(x) + \varepsilon \leq g(x).$$

Exercice 30.

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ bornée et $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue. Montrer que $g \circ f$ et $f \circ g$ sont bornées.

Exercice 31.

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et T -périodique.

1. Montrer que f est bornée.
2. Montrer qu'il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que $f([x, x + T/2]) = f[\mathbb{R}]$.

Exercice 32.

Montrer qu'une fonction $f \in C^0(\mathbb{R})$ périodique est bornée.

Exercice 33.

Soit $f \in C^0([0, 1])$. Quelle est la nature de la suite $\left(\max_{k \in [0, n]} f\left(\frac{k}{n}\right)\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$?

Exercice 34⁺. ☑

Soit $f \in C^0(\mathbb{R})$ telle que $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow \pm\infty} +\infty$. Montrer que f possède un minimum sur \mathbb{R} .

Exercice 35.

Soit $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ continue. On suppose qu'il existe $l \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} l$. Montrer que f est bornée.

Exercice 36⁺.

Soit $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Montrer que la fonction

$$M : \begin{cases} \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \sup_{t \in [0, x]} f(t). \end{cases}$$

est bien définie, croissante et continue.

Fonctions coïncidant en un point

Exercice 37.

Soit $I = [a, b]$ et $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions continues telles que $f[I] \subseteq g[I]$.

Montrer qu'il existe $x_0 \in I$ tel que $f(x_0) = g(x_0)$.

Exercice 38. ☑

Soit $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions continues telles que $\sup_{[a, b]} f = \sup_{[a, b]} g$.

Montrer qu'il existe $x_0 \in [a, b]$ tel que $f(x_0) = g(x_0)$.

Exercice 39⁺.

Soit $f, g : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ continues telles que $f \circ g = g \circ f$. Montrer qu'il existe $x_0 \in [0, 1]$ tel que $f(x_0) = g(x_0)$.

Équations fonctionnelles

Exercice 40 (Équation fonctionnelle de Cauchy). 💡☑

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue telle que $\forall x, y \in \mathbb{R}, f(x + y) = f(x) + f(y)$.

Montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $f : x \mapsto \lambda x$.

Exercice 41⁺. 💡☑

Soit $f \in C^0(\mathbb{R})$ telle que $\forall a, b \in \mathbb{R}, f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{f(a) + f(b)}{2}$. Montrer que f est convexe.

Exercice 42.

Déterminer les fonctions $f \in C^0(\mathbb{R})$ telles que $f^2 = f$.

Exercice 43. 💡

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue en 0 telle que $\forall x \in \mathbb{R}, f(2x) = f(x)$. Montrer que f est une fonction constante.

Exercice 44⁺.

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue en 0 et en 1 telle que $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = f(x^2)$. Montrer que f est une fonction constante.

Exercice 45⁺.

Soit $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ continue telle que $f \circ f = \text{id}_{\mathbb{R}_+}$. Déterminer f .

Mélange**Exercice 46.**

1. Trouver trois intervalles I_0, I_1 et I_2 tels que tout intervalle non trivial de \mathbb{R} soit homéomorphe à exactement l'un de ces trois exemples.
2. À quelle condition existe-t-il une application continue surjective $I_k \rightarrow I_\ell$?

Exercice 47.

Soit $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue surjective. Montrer que f prend toute valeur une infinité de fois.

Exercice 48.

Soit $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ lipschitzienne. Montrer $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (-1)^k f\left(\frac{k}{n}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

Exercice 49 (Fonction de Thomae).

On considère la fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ qui associe 0 à tout irrationnel et $1/q$ au rationnel p/q écrit sous forme irréductible. Quels sont les points où f est continue ?

Exercice 50⁺.

1. Trouver une fonction $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue en aucun point.
2. Trouver une fonction $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue en exactement un point.
3. Trouver une fonction $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue exactement sur les entiers.

Exercice 51⁺⁺.

1. Trouver $f \in C^0(\mathbb{R})$ non bornée telle que $f \circ f$ soit bornée.
2. Montrer que si $f \in C^0(\mathbb{R})$ est telle que $f \circ f \circ f$ est bornée, alors $f \circ f$ est bornée.

Exercice 52⁺⁺⁺.

Trouver toutes les fonctions $f \in C^0(\mathbb{R})$ telles que $\forall x \in \mathbb{R}, f(f(x)) = f(x) + x$.

Analyse asymptotique**Généralités****Exercice 53.**

Trouver $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telle que l'on ait, pour tout $\alpha > 0$, les relations de négligeabilité $x^\alpha = o_{x \rightarrow +\infty}(f(x))$ et $f(x) = o_{x \rightarrow +\infty}(e^{\alpha x})$.

Exercice 54.

Peut-on trouver $f \in C^0([0, 1])$ telle que $f(0) = 0$ et $\forall \alpha > 0, x^\alpha = o_{x \rightarrow 0}(f(x))$?

Exercice 55.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, donner un développement asymptotique de $\arctan x$ en $+\infty$, à la précision $o\left(\frac{1}{x^n}\right)$.

Exercice 56.

1. Peut-on trouver $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a \sin x + b x \cos x = x + O(x^5)$?
2. Parmi les fonctions $(f_{a,b})_{a,b \in \mathbb{R}}$ définies par $f_{a,b} : x \mapsto \sin x - \frac{x + ax^3}{1 + bx^2}$, y en a-t-il une qui soit négligeable (en 0) devant toutes les autres ?
3. Peut-on trouver deux réels a et b tels qu'il existe une constante C vérifiant

$$\frac{1}{x} + \frac{a}{\ln(1+x)} + \frac{b}{e^x - 1} \underset{x \rightarrow 0}{\sim} Cx ?$$

Applications**Autocorrection D.**

Donner un équivalent simple des fonctions suivantes, au voisinage du point donné.

- | | |
|--|--|
| (i) $x \mapsto \lfloor x \rfloor$ (en $+\infty$); | (ix) $x \mapsto \frac{\sqrt{x^3 + 2}}{\sqrt[3]{x^2 + 3}}$ (en $+\infty$); |
| (ii) $x \mapsto \frac{x^4 + 3x^2 - x + 2}{2x^3 - x}$ (en 0 et en $+\infty$); | (x) $x \mapsto \sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{x^2 - 1}$ (en $+\infty$); |
| (iii) $x \mapsto \ln(1+x^2) - \sin(x^2) + 2 \cos^2(x)$ (en $+\infty$); | (xi) $x \mapsto \frac{\ln(x+1)}{\ln x} - 1$ (en $+\infty$); |
| (iv) $x \mapsto \frac{\ln x}{\sqrt{x-1}}$ (en 1); | (xii) $x \mapsto \sqrt{\ln(x+1)} - \sqrt{\ln(x-1)}$ (en $+\infty$); |
| (v) $x \mapsto \frac{1}{x} - \frac{1}{1+x} + \frac{1}{2+x}$ (en 0 et en $+\infty$); | (xiii) $x \mapsto x \ln(x+1) - (x+1) \ln x$ (en $+\infty$); |
| (vi) $x \mapsto 1 + e^{e^x} - \arctan x$ (en $-\infty$); | (xiv) $x \mapsto \sqrt{1+x^2} - \sqrt{1-x^2}$ (en 0); |
| (vii) $x \mapsto \sqrt{\sqrt{x+2} - \sqrt{x+1}}$ (en $+\infty$); | (xv) $x \mapsto \tan x - \sin x$ (en 0); |
| (viii) $x \mapsto \frac{\sin(x)}{\sqrt{x}}$ (en π); | (xvi) $x \mapsto \ln(1 + \sin x)$ (en 0); |
| | (xvii) $x \mapsto \ln(\ln(1+x))$ (en 0); |
| | (xviii) $x \mapsto \ln(\cos x)$ (en $\pi/2$). |

Exercice 57⁺.

1. Déterminer un équivalent de $x \mapsto x^{\sin x} - (\sin x)^x$ au voisinage de 0.
2. Déterminer un équivalent de $x \mapsto \operatorname{sh}(\sin x) - \sin(\operatorname{sh} x)$ au voisinage de 0.

Exercice 58.

Donner un équivalent simple des fonctions suivantes.

- (i) $x \mapsto \arcsin x - \operatorname{sh} x$, au voisinage de 0.
- (ii) $x \mapsto \left(\frac{2}{\pi} \arctan x\right)^x$ au voisinage de $+\infty$.

Exercice 59.

$$\text{Soit } f : \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ \frac{x^2}{e^x - e^{-x}} & \text{sinon.} \end{cases} \end{cases}$$

1. Montrer que f possède un développement limité à l'ordre 3 au voisinage de 0 et le calculer.
2. Montrer que f est dérivable sur \mathbb{R} . Que vaut $f'(0)$?
3. Préciser la position relative de la courbe représentative de f par rapport à sa tangente au voisinage de 0.

Exercice 60.

$$\text{Soit } f : \begin{cases} \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ x^{1+1/x} & \text{sinon.} \end{cases} \end{cases}$$

1. Étudier la continuité et la dérivabilité de f sur \mathbb{R}_+ .
2. Montrer que f possède un développement limité au voisinage de 1 à l'ordre 3 et le calculer. Qu'en déduit-on sur le graphe de f ?

Exercice 61.

Étudier au voisinage de 0 la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{x} - \frac{1}{\arcsin x}$.

(Est-elle prolongeable par continuité? le prolongement est-il dérivable? que dire de la position relative du graphe et de sa tangente?)

Exercice 62.

$$\text{Soit } f : \begin{cases} \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto (x+1)e^{1/x}. \end{cases}$$

Étudier les asymptotes du graphe de f , et la position relative du graphe et de ses asymptotes.

Exercice 63.

1. Déterminer un développement asymptotique de $x \mapsto \sqrt{x^4 + x^3 + 1}$ à la précision $\frac{1}{x}$ en $+\infty$.
2. Montrer que l'ensemble $E = \{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 \mid y^2 = x^4 + x^3 + 1\}$ est fini.

Exercice 64.

Soit $n \geq 1$. Soit $f : x \mapsto \frac{e^{(n+1)x} - 1}{e^x - 1}$.

1. Montrer que f est prolongeable par continuité en 0.
2. Déterminer le développement limité de f en 0 à l'ordre 3.
3. En interprétant f comme une somme, retrouver la valeur de $\sum_{k=1}^n k^3$.