Dimension

Généralités

Autocorrection A.

1. Donner une base de $\operatorname{Vect}((1,-1,1),(0,-1,2),(1,-2,3))$.
2. En déduire que $\operatorname{Vect}((1,-1,1),(0,-1,2),(1,-2,3)) = \left\{(x,y,z) \in K^3 \;\middle|\; x+2y+z=0\right\}$.

Autocorrection B.

Soit $t \in \mathbb{R}$. On définit $D_t = \operatorname{Vect}(t,t,1)$ et $P_t = \operatorname{Vect}((1,t,1),(2,1,1))$.

1. Montrer que D_t et P_t sont deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$, dont on précisera la dimension.
2. Donner une condition nécessaire et suffisante portant sur $t \in \mathbb{R}$ pour que l'on ait $D_t \oplus P_t = \mathbb{R}^3$.

Exercice 1.

Donner une base et la dimension des espaces vectoriels suivants.

(i) $E = \operatorname{Vect}((1,2,1,0),(4,-2,1,1),(7,2,4,2),(11,4,1,3))$;

(ii) $F = \left\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; 3x-2y-z+2t=0 \text{ et } 3y-2z+t=0\right\}$.

Exercice 2.

Soit $(e_1,\dots,e_n)$ une famille génératrice de K^n. Montrer que $(e_2,\dots,e_n)$ est libre.

Exercice 3.

Pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, on définit

$$u_k = (k, k-1, \dots, 2, 1, 0, \dots, 0) \in K^n.$$

Montrer que $(u_1,u_2,\dots,u_n)$ est une base de K^n.

Espaces de suites, de matrices et de polynômes

Exercice 4.

Soit $n \geqslant 1$. Rappeler la dimension de $M_n(K)$. Déterminer les dimensions :

(i) de l'espace $D_n(K)$ des matrices diagonales ;

(ii) de l'espace $T_n^+(K)$ des matrices triangulaires supérieures ;

(iii) de l'espace $T_n^-(K)$ des matrices triangulaires inférieures ;

(iv) de l'espace $S_n(K)$ des matrices symétriques ;

(v) de l'espace $A_n(K)$ des matrices antisymétriques ;

(vi) de l'espace $\mathfrak{sl}_n(K) = \ker \operatorname{tr}$.

Exercice 5^+.

Une matrice $M \in M_n(\mathbb{R})$ est dite *magique* s'il existe un nombre réel m tel que la somme des coefficients de M présents sur chaque ligne et sur chaque colonne vaut m.

Montrer que l'ensemble $\mathcal{M}$ des matrices magiques est un sous-espace vectoriel de $M_n(K)$, et déterminer sa dimension.

Exercice 6^+.

1. On considère un polynôme $P = X^2 + \alpha X + \beta$ admettant deux racines $\rho \neq \sigma \in K$ et on pose
$$\mathcal{R} = \{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \,|\, \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} + \alpha u_{n+1} + \beta u_n = 0\}.$$
Montrer que $\mathcal{R}$ est un plan vectoriel, puis en déduire que $((\rho^n)_{n\in\mathbb{N}}, (\sigma^n)_{n\in\mathbb{N}})$ est une base de $\mathcal{R}$.
2. Soit $X^k+\alpha_{k-1}X^{k-1}+\dots+\alpha_1 X+\alpha_0 \in K[X]$ un polynôme possédant k racines distinctes $\rho_1, \dots, \rho_n$. En généralisant le raisonnement de la question précédente, montrer que
$$\mathcal{R}' = \{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \,|\, \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+k} + \alpha_{k-1}u_{n+k-1} + \dots + \alpha_1 u_{n+1} + \alpha_0 u_n = 0\}$$
est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ de dimension k et en exhiber une base.

Sous-espaces vectoriels

Autocorrection C.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{P} = \{P \in K_{2n}[X] \,|\, P(-X) = P(X)\}$ et $\mathcal{I} = \{P \in K_{2n}[X] \,|\, P(-X) = -P(X)\}$.

1. Montrer que $\mathcal{P}$ et $\mathcal{I}$ sont des sous-espaces vectoriels de $K_{2n}[X]$.
2. Montrer que $\mathcal{P}$ et $\mathcal{I}$ sont en somme directe.
3. En exhibant des familles libres explicites, montrer que $\dim \mathcal{P} \geqslant n + 1$ et $\dim \mathcal{I} \geqslant n$.
4. En faisant le moins de calculs possibles, montrer que les inégalités de la question précédente sont des égalités, et en déduire une base de $\mathcal{P}$, une base de $\mathcal{I}$, et une démonstration du fait que $K_{2n}[X] = \mathcal{P} \oplus \mathcal{I}$.

Exercice 7.

Soit E un espace vectoriel et $x_1, \dots x_n, y_1, \dots, y_n \in E$.

On suppose la famille $(x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n)$ libre. En déduire que $\mathrm{rg}(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, x_n) \geqslant n$.

Exercice 8.

1. Soit E un sous-espace vectoriel de K^n. Montrer qu'il existe une sous-famille $(e_{i_1}, \dots, e_{i_r})$ de la base canonique telle que E et $\mathrm{Vect}(e_{i_1}, \dots, e_{i_r})$ soient supplémentaires.
2. Déterminer un supplémentaire de $\left\{(x, y, z, t) \in K^4 \,\middle|\, x - y - z + t = 0 \text{ et } y - 2z + t = 0\right\}$.

Exercice 9.

Soit V_1 et V_2 deux sous-espaces vectoriels de dimension finie d'un espace vectoriel E.

On suppose $\dim(V_1 + V_2) = \dim(V_1 \cap V_2) + 1$. Montrer que $V_1 \subseteq V_2$ ou $V_2 \subseteq V_1$.

Exercice 10.

1. Soit A, B et C trois parties finies d'un ensemble Ω. Montrer que
$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C| .$$
2. Soit F, G et H trois sous-espaces vectoriels de dimension finie d'un espace vectoriel E. A-t-on
$$\begin{aligned}\dim(F+G+H) &= \dim(F)+\dim(G)+\dim(H)\\ &\qquad -\dim(F\cap G)-\dim(F\cap H)-\dim(G\cap H)+\dim(F\cap G\cap H)\ ?\end{aligned}$$

Exercice 11.
Soit E un espace vectoriel de dimension finie.

1. Montrer que si F et G sont deux sous-espaces vectoriels de E tels que $\dim F + \dim G > \dim E$, alors F et G ne peuvent pas être en somme directe.
2. Soit F, G et H trois sous-espaces vectoriels de E. Donner une condition sur $\dim F+\dim G+\dim H$ garantissant que l'intersection $F \cap G \cap H$ soit non triviale.

Exercice 12$^+$.
Soit E un espace vectoriel de dimension n et $p, q \in [\![0, n]\!]$. Quelles sont les dimensions possibles pour une intersection $F \cap G$, quand F (resp. G) est un sous-espace vectoriel de E de dimension p (resp. q) ?

Exercice 13$^+$.
Soit E un espace vectoriel de dimension n et $(F_i)_{i=1}^{n+1}$ une famille de sous-espaces vectoriels de E. Montrer qu'il existe $J \subsetneq [\![1, n+1]\!]$ tel que $\displaystyle\sum_{j\in J} F_j = \sum_{i=1}^{n+1} F_i$.

Exercice 14.
Soit E un espace vectoriel de dimension n.

1. Soit H et H' deux hyperplans de E. Montrer que $\dim(H\cap H') \in \{n-1, n-2\}$, et déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que $\dim(H \cap H') = n-2$.
2. Quelle est la dimension de
$$\left\{ (a,b,c,d,e,f,g,h,i) \in \mathbb{R}^9 \;\middle|\; \begin{array}{rl} a-7b+3c-2d+f-g+\sqrt{2}h+42i &= 0 \\ a+2b+3c+4d+5e+6f+7g+8h+9i &= 0 \end{array} \right\} \ ?$$
3. Soit $H_1, \dots, H_r$ des hyperplans de E. Montrer que
$$\dim\left(\bigcap_{i=1}^{r} H_i\right) \geqslant n - r.$$
4. Soit $v = (2, 1, -1, 0) \in \mathbb{R}^4$ et $D = \mathrm{Vect}(v)$. Écrire D comme l'intersection de trois hyperplans.

Exercice 15.
Soit E un espace vectoriel de dimension finie et $F, G \subseteq E$ deux espaces en somme directe.

Montrer qu'il existe un sous-espace vectoriel $\widehat{F} \supseteq F$ de E tel que $\widehat{F} \oplus G = E$.

Exercice 16.
Montrer que deux supplémentaires d'un même sous-espace vectoriel sont isomorphes.

Exercice 17$^+$ (Lemme de l'échange de Steinitz).

Soit E un espace vectoriel et $(f_1, \dots, f_m)$ une famille génératrice de E et $(e_1, \dots, e_n)$ une famille libre de E. Pour $r \in [\![1, n]\!]$, on définit l'assertion $P(r)$:

> « il existe des indices $i_1, \dots, i_r$ tous distincts telle que la famille obtenue à partir de $(f_1, \dots, f_m)$ en remplaçant chacun des f_{i_k} par e_k est génératrice. »

1. Montrer par récurrence l'assertion $\forall r \in [\![1, n]\!], P(r)$.
2. Constater que ce résultat redémontre le lemme d'échange de Steinitz, et explique mieux son nom.

Exercice 18 (Commutant de matrices 2×2).

Dans cet exercice, on fixe une matrice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(K)$ et on étudie son *commutant*, c'est-à-dire

$$\mathcal{C}(A) = \{M \in M_2(K) \mid AM = MA\}.$$

Plus précisément, on va montrer

$$\mathcal{C}(A) = \begin{cases} M_2(K) & \text{si } A \in \mathrm{Vect}(I_2) \\ \mathrm{Vect}(I_2, A) & \text{sinon.} \end{cases} \qquad (\heartsuit)$$

Généralités.

1. Montrer que $\mathcal{C}(A)$ est un sous-espace vectoriel de $M_2(K)$.
2. Montrer que $\mathcal{C}(A)$ est stable par produit : $\forall M, N \in \mathcal{C}(A), MN \in \mathcal{C}(A)$.
3. Déterminer $\mathcal{C}(A)$ quand A est une matrice scalaire.
4. En exhibant une famille libre explicite, montrer que $\dim \mathcal{C}(A) \geqslant 2$.

Un cas particulier. Dans cette partie, on suppose $a \neq d$.

5. Montrer que $\mathcal{C}(A)$ et $\mathrm{Vect}(E_{1,2}, E_{2,1})$ sont en somme directe.
6. En déduire que $\dim \mathcal{C}(A) = 2$ et $\mathcal{C}(A) = \mathrm{Vect}(I_2, A)$.

Fin de l'étude.

7. Soit $P \in GL_2(K)$. Montrer que $\mathcal{C}(A)$ et $\mathcal{C}(P^{-1}AP)$ sont isomorphes.
8. On suppose $A \notin T_2^+(K)$. À l'aide de la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, montrer que $\mathcal{C}(A) = \mathrm{Vect}(I_2, A)$.
9. Conclure la démonstration du résultat $(\heartsuit)$.

Applications linéaires (et théorème du rang)

Autocorrection D. ☑

Soit

$$f : \begin{cases} K^4 & \to & K^2 \\ (x, y, z, t) & \mapsto & (x - z, y - t) \end{cases}$$

1. Montrer que $f \in \mathcal{L}(K^4, K^2)$.
2. Donner une base et la dimension de $\ker f$.
3. En déduire que f est surjective.
4. Soit $G = \left\{(x, y, z, t) \in K^4 \,\middle|\, y = z = 0\right\}$.
   Montrer que G est un sous-espace vectoriel de K^4, dont on précisera la dimension.
5. Montrer que $\ker f$ et G sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de K^4.

Exercice 19.

Soit E un espace vectoriel réel de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^3 = \mathrm{id}_E$.

1. Montrer $\mathrm{im}(f - \mathrm{id}_E) \subseteq \ker(f^2 + f + \mathrm{id}_E)$;
2. Montrer que $\mathrm{im}(f - \mathrm{id}_E)$ et $\ker(f - \mathrm{id}_E)$ sont supplémentaires.

Exercice 20.

Soit E un espace vectoriel et $u \in \mathcal{L}(E)$.

1. Montrer que $E = \ker u \oplus \mathrm{im}\, u$ si et seulement si $\mathrm{im}\, u^2 = \mathrm{im}\, u$ et $\ker u^2 = \ker u$.
2. On suppose E de dimension finie, montrer que
$$E = \ker u \oplus \mathrm{im}\, u \Leftrightarrow \mathrm{im}\, u^2 = \mathrm{im}\, u \Leftrightarrow \ker u^2 = \ker u.$$
3. L'équivalence $\mathrm{im}\, u^2 = \mathrm{im}\, u \Leftrightarrow \ker u^2 = \ker u$ est-elle valable en dimension infinie ?

Exercice 21.

Soit E un espace vectoriel de dimension finie et $u, v \in \mathcal{L}(E)$.

1. On suppose que $\ker u + \ker v = \mathrm{im}\, u + \mathrm{im}\, v = E$. Montrer que les deux sommes sont directes.
2. Montrer par un contre-exemple que la question précédente cesse d'être vraie si l'on ne suppose plus E de dimension finie.

Exercice 22.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer qu'il existe un unique polynôme $P_n \in K[X]$ tel que $P_n - P_n' = X^n$.

Exercice 23.

Soit E et F deux espaces vectoriels de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E, F)$.

1. Soit $V \subseteq E$ un sous-espace vectoriel. Montrer que
$$\dim u[V] = \dim V - \dim (V \cap \ker u).$$
2. Soit $W \subseteq F$ un sous-espace vectoriel. Montrer que
$$\dim u^{-1}[W] = \dim (W \cap \mathrm{im}\, u) + \dim \ker u.$$

Exercice 24.

Soit E un espace vectoriel de dimension finie.

1. Soit F un sous-espace vectoriel de E.
   Montrer qu'il existe un espace vectoriel E' et $\varphi \in \mathcal{L}(E', E)$ tel que $F = \mathrm{im}\, \varphi$.
2. Soit G un sous-espace vectoriel de E.
   Montrer qu'il existe un espace vectoriel E'' et $\psi \in \mathcal{L}(E, E'')$ tel que $G = \ker \psi$.
3. Soit F et G deux sous-espaces vectoriels de E.
   À quelle condition existe-t-il $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $F = \mathrm{im}\, u$ et $G = \ker u$?

Exercice 25.

Soit E un espace vectoriel réel de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$ non nul. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) $u^2 = 0$;

(ii) il existe un projecteur p de E tel que $pu = u$ et $up = 0$;

(iii) il existe un projecteur p de E tel que $pu - up = u$.

Exercice 26$^+$ (Lemme de factorisation).

Soit E, F et G trois espaces vectoriels de dimension finie, $u \in \mathcal{L}(E, F)$, $v \in \mathcal{L}(E, G)$.

Le but de l'exercice est de démontrer que

$$\ker u \subseteq \ker v \Leftrightarrow (\exists w \in \mathcal{L}(F, G) : v = w \circ u) .$$

1. On suppose qu'il existe $w \in \mathcal{L}(F, G)$ telle que $v = w \circ u$. Montrer que $\ker u \subseteq \ker v$.
2. En considérant un supplémentaire S de $\ker u$ dans E et un supplémentaire T de $\operatorname{im} u$ dans F, construire une application linéaire $w \in \mathcal{L}(F, G)$ telle que $v = w \circ u$.

Exercice 27$^+$.

Soit V un espace vectoriel de dimension finie et $f_1, \dots, f_n \in \mathcal{L}(V, \mathbb{R})$. Soit $f \in \mathcal{L}(V, \mathbb{R})$ tel que

$$\forall x \in V, f_1(x) = f_2(x) = \cdots = f_n(x) = 0 \Rightarrow f(x) = 0.$$

Montrer que f est combinaison linéaire des $f_1, \dots, f_n$.

Exercice 28$^+$. X

Soit E un espace vectoriel réel de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que

$$\operatorname{im} f = \ker f \Leftrightarrow \left(f^2 = 0 \text{ et } \exists h \in \mathcal{L}(E) : hf + fh = \mathrm{id}\right) .$$

Exercice 29.

Soit E un espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\forall v \in \mathcal{L}(E), u \circ v = v \circ u$.

Montrer que u est une homothétie.

Exercice 30^{++}.

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie.

On dit que deux r-uplets $(F_1, \dots, F_r)$ et $(F'_1, \dots, F'_r)$ de sous-espaces vectoriels de E sont *équivalents* s'il existe un automorphisme $\varphi \in GL(E)$ tel que $\forall i \in [\![1, r]\!], \varphi[F_i] = F'_i$.

1. Classer les sous-espaces vectoriels de E à équivalence près.
2. Classer les couples de sous-espaces vectoriels de E à équivalence près.
3. On suppose pour simplifier que E est de dimension paire, et on note $r = \dfrac{1}{2} \dim E$.
   Montrer que les triplets de sous-espaces vectoriels (F_1, F_2, F_3) tels que $\forall i \in [\![1, 3]\!], \dim F_i = r$ et $\forall i \neq j \in [\![1, 3]\!], F_i \cap F_j = \{0_E\}$ sont tous équivalents entre eux.
4. On suppose toujours $\dim E = 2r$. Montrer qu'il existe une infinité de quadruplets de sous-espaces vectoriels (F_1, F_2, F_3, F_4) tels que $\forall i \in [\![1, 4]\!], \dim F_i = r$ et $\forall i \neq j \in [\![1, 4]\!], F_i \cap F_j = \{0_E\}$ deux à deux non équivalents.

Inégalités sur le rang et la dimension

Exercice 31.

Soit $(u_1, \dots, u_n)$ une famille de vecteurs d'un espace vectoriel E. Soit $p \leqslant q$ deux éléments de $[\![1, n]\!]$.

Montrer $0 \leqslant \mathrm{rg}(u_1, \dots, u_q) - \mathrm{rg}(u_1, \dots, u_p) \leqslant q - p$.

Exercice 32.

Soit E un espace vectoriel de dimension finie et $a, b \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que

$$\dim \ker(a \circ b) \leqslant \dim \ker a + \dim \ker b.$$

Exercice 33$^+$.

Soit E un espace vectoriel de dimension n et $r, s \in [\![0, n]\!]$. Déterminer

$$\mathcal{R}(r, s) = \left\{ \operatorname{rg}(g \circ f) \,\middle|\, (f, g) \in \mathcal{L}(E)^2, \operatorname{rg} f = r \text{ et } \operatorname{rg} g = s \right\}.$$

Exercice 34$^+$.

1. **Deux résultats sur les intersections d'hyperplans.** Soit E un espace vectoriel de dimension n.
   (a) On se donne c hyperplans $H_1, \dots, H_c$ de E. Montrer que $\dim \left(\bigcap_{i=1}^{c} H_i \right) \geqslant n - c$.
   (b) Donner un exemple où l'inégalité ci-dessus est stricte.
   (c) Réciproquement, soit $c \in [\![0, n]\!]$ et F un sous-espace vectoriel de E de dimension $n - c$. Exprimer F comme l'intersection d'exactement c hyperplans de E.
2. **Une application : décroissance de la codimension par image réciproque.** Soit E et F deux espaces vectoriels de dimension finie, $u \in \mathcal{L}(E, F)$, et V un sous-espace vectoriel de F.
   En exprimant V comme une intersection d'hyperplans, montrer l'inégalité
   $$\dim E - \dim u^{-1}[V] \leqslant \dim F - \dim V.$$
3. En utilisant notamment le théorème du rang et la formule de Grassmann, donner une deuxième démonstration de l'inégalité précédente, sans utiliser d'hyperplans.

Mélange

Exercice 35.

Soit E, F et G trois espaces vectoriels de dimension finie. Soit $a \in \mathcal{L}(E, F)$ et $b \in \mathcal{L}(E, G)$.

Montrer que si $\operatorname{rg} a + \operatorname{rg} b < \dim E$, il existe $x \in E$ non nul tel que $a(x) = 0$ et $b(x) = 0$.

Exercice 36.

Soit $A, B, C \in M_2(\mathbb{R})$. Montrer sans calcul qu'on peut trouver un triplet non nul de réels (λ, μ, ν) tel que la matrice $\lambda A + \mu B + \nu C$ soit triangulaire supérieure et de trace nulle.

Exercice 37.

Soit E un espace vectoriel et $F_1, \dots, F_p$ des sous-espaces vectoriels de E.

Montrer que les F_i, $i \in [\![1, p]\!]$ sont en somme directe si et seulement si $\dim \left(\sum_{i=1}^{p} F_i \right) = \sum_{i=1}^{p} \dim F_i$.

Exercice 38$^+$.

Soit $(f_1, \dots, f_n)$ une famille libre de fonctions dérivables $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Montrer $\operatorname{rg}(f_1', \dots, f_n') \geqslant n - 1$.

Exercice 39.

Montrer que $\varphi : \begin{cases} K[X] \times K \to & K[X] \\ \quad (P, \kappa) & \mapsto XP + \kappa \end{cases}$ est un isomorphisme, et en déduire une nouvelle preuve du fait que K[X] n'est pas de dimension finie.