Algèbres

Exercice 1.
Soit k un corps et soit A une k-algèbre commutative de type fini (i.e. engendrée comme k-algèbre par un nombre fini d'éléments de A). Montrer que A est isomorphe (en tant que k-algèbre) à un quotient d'un anneau de polynômes $k[X_1, \dots, X_n]$ en plusieurs variables par un idéal I engendré par un nombre fini de polynômes.

Exercice 2.
Soient A un anneau commutatif unitaire et B une A-algèbre. Soit $I = (f_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ l'idéal engendré par une famille d'éléments $f_\lambda \in A[X_1, \dots, X_n]$.

1. Montrer qu'on a une bijection
$$\mathrm{Hom}_{\text{A-Alg}}(A[X_1, \dots, X_n]/I, B) \simeq \left\{(b_1, \dots, b_n) \in B^n \,\middle|\, \forall\lambda \in \Lambda, f_\lambda(b_1, \dots, b_n) = 0\right\}.$$
2. Soit $\mathbf{C}[X_{i,j}]$ la $\mathbf{C}$-algèbre de polynômes en $(X_{i,j})_{\substack{1\le i\le n\\ 1\le j\le n}}$ et $R = \mathbf{C}[X_{i,j}][T]/(1-T\,\mathrm{dét}(X_{i,j}))$. Donner une description de $\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}\text{-Alg}}(R, \mathbf{C})$.
3. Donner une description de $\mathrm{Hom}_{\mathbf{R}\text{-Alg}}(\mathbf{R}[X, Y]/(X^2 + Y^2 - 1), \mathbf{R})$.
4. Donner une description de $\mathrm{Hom}_{\mathbf{R}\text{-Alg}}(\mathbf{R}[X, Y]/(X^2 + Y^2 - 1), \mathbf{R}[T]/(T^2))$.

Exercice 3.
Soit k un corps ; donner des isomorphismes de k-algèbres entre $k[X, Y]/(Y - X^2)$ et $k[T]$, ainsi qu'entre $k[X, Y]/(Y^2 - X^3)$ et $k[T^2, T^3]$.

Exercice 4. (Quelques propriétés universelles)

1. Soit k un corps et n un entier. Montrer qu'il existe un couple $(E, (x_1, \dots, x_n))$, où E est un k-espace vectoriel et $(x_1, \dots, x_n)$ un n-uplet d'éléments de E, vérifiant la propriété universelle suivante : pour tout k-espace vectoriel F et tout n-uplet $(y_1, \dots, y_n)$ d'éléments de F, il existe une unique application linéaire $\varphi : E \to F$ telle que pour tout $1 \le i \le n$, $\varphi(x_i) = y_i$. En déduire une bijection $L(E, F) \simeq F^n$.
2. Montrer qu'un résultat similaire reste vrai en remplaçant « espace vectoriel » par « groupe abélien » et « application linéaire » par « morphisme » mais que le résultat tombe en défaut pour les groupes abéliens finis.
3. Montrer que le k-espace vectoriel et le groupe abélien des deux premières questions sont uniques à isomorphisme près. Démontrer de la même façon que toute A-algèbre commutative vérifiant la propriété universelle énoncée en cours est isomorphe à $A[X_1, \dots, X_n]$.

Exercice 5. (Polynômes homogènes)
Soient k un corps et n un entier plus grand que 1. Soit d un entier ; un polynôme P de $k[X_1, \dots, X_n]$ est dit *homogène de degré d* s'il est somme de monômes de degré d.

1. Quels sont les polynômes homogènes de degré 0 ? Un polynôme peut-il être homogène pour deux degrés différents ? Quand la somme de deux polynômes homogènes est-elle homogène ? Le produit ? Pour quel degré ?

2. Soit d un entier fixé ; montrer que l'ensemble des polynômes homogènes de degré d forme un sous-k-espace vectoriel de $k[\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_n]$; on le note ici $k[\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_n]_d$. Donner sa dimension.
3. Montrer que le k-espace vectoriel $k[\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_n]$ est la somme directe de ses sous-espaces $k[\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_n]_d$, d décrivant $\mathbf{N}$. La projection d'un polynôme P sur $k[\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_n]_d$ correspondant à cette décomposition est appelée composante homogène de degré d de P.
4. Soient P et Q deux polynômes de $k[\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_n]$ dont le produit est homogène. Montrer que P et Q sont homogènes.
5. *(Application)* On suppose n supérieur ou égal à 2 ; montrer que $\mathrm{X}_1^2 + \cdots + \mathrm{X}_n^2$ est irréductible dans $\mathbf{R}[\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_n]$. Qu'en est-il sur $\mathbf{C}$?

Exercice 6. Soit k un corps.

1. Soient $f, g \in k[\mathrm{T}]$ non constants. Dans l'anneau $k[\mathrm{X}, \mathrm{Y}]$, on considère l'idéal I engendré par $f(\mathrm{X})$ et $g(\mathrm{Y})$. Montrer que $\mathrm{I} \neq k[\mathrm{X}, \mathrm{Y}]$.
2. Soient $f_1, \ldots, f_n$ des polynômes à une indéterminée à coefficients dans k, non constants. Montrer que l'idéal de $k[\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_n]$ engendré par $f_1(\mathrm{X}_1), \ldots, f_n(\mathrm{X}_n)$ n'est pas l'anneau tout entier.
3. Montrer que pour tout entier $1 \leq r \leq n$, l'idéal de $k[\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_n]$ engendré par $\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_r$ est premier. Ces n idéaux sont-ils deux à deux distincts ?
4. Retrouver ces résultats dans le cas où k est un anneau intègre.

Exercice 7. (Automorphismes d'algèbre des polynômes en une variable)
Soit k un corps.

1. Soient α et β dans k, avec β non nul. Montrer que l'endomorphisme de k-algèbre $\mathrm{U}_{\alpha,\beta}$ de $k[\mathrm{X}]$ qui envoie X sur $\alpha + \beta\mathrm{X}$ est un automorphisme.
2. Réciproquement, si U est un automorphisme de k-algèbres de $k[\mathrm{X}]$, montrer qu'il existe un unique couple (α, β) dans $k \times k^*$ tel que U soit $\mathrm{U}_{\alpha,\beta}$. (*Indication* : considérer P et Q tels que $\mathrm{U}(\mathrm{X}) = \mathrm{P}$ et $\mathrm{U}(\mathrm{Q}) = \mathrm{X}$ et regarder le reste de la division euclidienne de Q par X).

Exercice 8. (Produit tensoriel de A-algèbres)
Soit M et N deux A-modules. On forme le A-module libre L construit [1] sur l'ensemble $\mathrm{M} \times \mathrm{N}$. Soit K le sous-module de L engendré par les éléments de la forme $e_{x+x',y} - e_{x,y} - e_{x',y}$, $e_{x,y+y'} - e_{x,y} - e_{x,y'}$, $e_{ax,y} - a \cdot e_{x,y}$ et $e_{x,ay} - a \cdot e_{x,y}$ (quand x et x' décrivent M, y et y' décrivent N, et a décrit A). On pose enfin $\mathrm{M} \otimes_\mathrm{A} \mathrm{N} = \mathrm{L}/\mathrm{K}$ (*le produit tensoriel des deux modules*) et $g : \mathrm{M} \times \mathrm{N} \to \mathrm{M} \otimes_\mathrm{A} \mathrm{N}$ l'application qui associe à un couple $(x, y) \in \mathrm{M} \times \mathrm{N}$ la classe, notée $x \otimes y$, de $e_{x,y}$ dans L/K.

1. Montrer que l'application g est A-bilinéaire et que son image engendre $\mathrm{M} \otimes_\mathrm{A} \mathrm{N}$.
2. Montrer que pour tout A-module P et toute application A-bilinéaire $f : \mathrm{M} \times \mathrm{N} \to \mathrm{P}$, il existe une unique application A-linéaire $\overline{f} : \mathrm{M} \otimes_\mathrm{A} \mathrm{N} \to \mathrm{P}$ telle que $f = \overline{f} \circ g$.
3. Montrer que si (T, g') est un autre couple possédant la propriété de la question précédente, il existe un isomorphisme $j : \mathrm{T} \to \mathrm{M} \otimes_\mathrm{A} \mathrm{N}$ tel que $g = j \circ g'$.
4. On suppose maintenant que M et N sont deux A-algèbres. Montrer que la formule $\mu(x \otimes y, x' \otimes y') = xx' \otimes yy'$ définit une unique application A-bilinéaire $\mu : (\mathrm{M} \otimes_\mathrm{A} \mathrm{N}) \times (\mathrm{M} \otimes_\mathrm{A} \mathrm{N}) \to \mathrm{M} \otimes_\mathrm{A} \mathrm{N}$, et que celle-ci munit le A-module $\mathrm{M} \otimes_\mathrm{A} \mathrm{N}$ d'une structure de A-algèbre.

1. On rappelle que par définition, cela signifie que le A-module L a une base $(e_{m,n})_{(m,n) \in \mathrm{M} \times \mathrm{N}}$ indexée par $\mathrm{M} \times \mathrm{N}$: tout élément se décompose donc de façon unique comme une combinaison linéaire (finie) d'éléments de cette base.