Interrogation de calcul 12

Question 1. On se place dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}[X]$.

- Montrer que la famille $\mathcal{F} = \big(\underbrace{X-1}_{=P_1}, \underbrace{X(X-1)}_{=P_2}, \underbrace{X(X-1)(X-2)}_{=P_3}\big)$ est libre.

- On fixe $\alpha \in \mathbb{R}$ et $Q_\alpha = X^3 + 3X^2 - X - \alpha$. Calculer $Q_\alpha(1)$.

- On suppose $\alpha \neq 3$. Montrer que $Q_\alpha \notin \text{Vect}(\mathcal{F})$.

- On suppose $\alpha = 3$. Montrer que $Q_\alpha \in \text{Vect}(\mathcal{F})$, et écrire Q_α comme une combinaison linéaire sur $\mathcal{F}$.

Question 2. On considère $F = \text{Vect}(ch, sh)$ et $G = \left\{ f \in C^1(\mathbb{R}) \;\middle|\; f(0) = f'(0) = 0 \right\}$.

- Justifier que F et G sont des sous-espaces vectoriels de $C^1(\mathbb{R})$.

- Montrer que $C^1(\mathbb{R}) = F \oplus G$.

- Écrire les composantes de $cos \in C^1(\mathbb{R})$ selon F et selon G.

Question 3. On considère l'endomorphisme $f : \begin{cases} M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R}) \\ M \mapsto M + M^T \end{cases}$ et la famille $\mathcal{F} = \big(E_{1,1}, E_{1,2}, E_{2,2}, J\big)$, où, comme d'habitude, les $E_{i,j}$ sont les matrices de la base canonique et $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

- Montrer que la famille $\mathcal{F}$ est libre.

- Montrer que la famille $f_*\mathcal{F} = \big(f(E_{1,1}), f(E_{1,2}), f(E_{2,2}), f(J)\big)$ est liée.

Question 4. Déterminer la limite de $f : x \mapsto \tan(x)^{\tan(2x)}$ quand $x \to \frac{\pi}{4}$.