Première composition de mathématiques [corrigé]

Exercice 1

1. On considère les deux assertions suivantes :

   (☺) $\forall x \in \mathbb{R}, \big(\forall y \in \mathbb{R}, xy = 0\big) \Rightarrow x = 0.$

   (☹) $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, \big(xy = 0 \Rightarrow x = 0\big).$

   (a) Écrire les négations des deux assertions.

   non(☺) **:** $\exists x \in \mathbb{R} : \big(\forall y \in \mathbb{R}, xy = 0\big)$ et $x \neq 0$.

   non(☹) **:** $\exists x \in \mathbb{R} : \exists y \in \mathbb{R} : xy = 0$ et $x \neq 0$.

   (b) Montrer (en suivant scrupuleusement les canevas de démonstration) que (☺) est vraie et que (☹) est fausse.

   ▸ *Montrons (☺).*

   Soit $x \in \mathbb{R}$ *tel que* $\forall y \in \mathbb{R}, xy = 0$.

   En appliquant cette $\forall$*-assertion à* $y = 1$ *(qui est bien un élément de* $\mathbb{R}$*), on obtient* $x = 0$*, ce qui conclut.*

   ▸ *Montrons* non(☹).

   Candidats : $x = 1$ *et* $y = 0$.

   - *On a bien* $x \in \mathbb{R}$ *et* $y \in \mathbb{R}$.
   - *On a bien* $xy = 1 \times 0 = 0$ *et* $x \neq 0$.

2. Montrer $\forall \theta \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, |\sin(n\theta)| \leqslant n\,|\sin(\theta)|$.

Soit $\theta \in \mathbb{R}$. *Pour tout* $n \in \mathbb{N}$*, on note* $P(n)$ *l'assertion* « $|\sin(n\theta)| \leqslant n\,|\sin(\theta)|$ ».

Montrons $\forall n \in \mathbb{N}, P(n)$ *par récurrence.*

Initialisation. *Pour* $n = 0$*, on a* $\sin(n\theta) = \sin(0) = 0$*, d'où* $P(0)$.

Hérédité. *Soit* $n \in \mathbb{N}$ *tel que* $P(n)$. *Montrons* $P(n+1)$. *On a*

$$\begin{aligned}
\big|\sin\big((n+1)\theta\big)\big| &= |\sin(n\theta + \theta)| \\
&= |\sin(n\theta)\,\cos(\theta) + \sin(\theta)\,\cos(n\theta)| \\
&\leqslant |\sin(n\theta)|\,\underbrace{|\cos(\theta)|}_{\leqslant 1} + |\sin(\theta)|\,\underbrace{|\cos(n\theta)|}_{\leqslant 1} && \textit{(inég. triang.)} \\
&\leqslant |\sin(n\theta)| + |\sin(\theta)| \\
&\leqslant n\,|\sin(\theta)| + |\sin(\theta)| && \textit{(d'après } P(n)\textit{)} \\
&\leqslant (n+1)\,|\sin(\theta)|,
\end{aligned}$$

ce qui montre $P(n+1)$ *et clôt la récurrence.*

Exercice 2

On rappelle que $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ désigne l'ensemble de toutes les fonctions $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Dans cet exercice, on considèrera des parties $\mathscr{F}$ de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, c'est-à-dire des ensembles $\mathscr{F}$ composés de fonctions $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Parmi toutes les propriétés que peut posséder un tel ensemble, on en nomme trois, que l'on présente sous forme d'assertions quantifiées :

(Z) $\forall f \in \mathscr{F}, \exists x \in \mathbb{R} : f(x) = 0$;

(ZU) $\forall f \in \mathscr{F}, \exists! x \in \mathbb{R} : f(x) = 0$;

(ZG) $\exists x \in \mathbb{R} : \forall f \in \mathscr{F}, f(x) = 0$.

1. Étant donné trois réels strictement positifs $a, b, c \in \mathbb{R}_+^*$, on définit la fonction $g_{a,b,c} : \begin{cases} \mathbb{R} \to & \mathbb{R} \\ x \mapsto & e^{ax+b} - c. \end{cases}$

   Montrer que l'ensemble $\mathscr{F} = \left\{ g_{a,b,c} \,\middle|\, a, b, c \in \mathbb{R}_+^* \right\}$ vérifie la propriété **(ZU)**.

   Soit $f \in \mathscr{F}$. *On peut donc trouver* $a, b, c \in \mathbb{R}_+^*$ *tels que* $f = g_{a,b,c}$, *c'est-à-dire que* $f : x \mapsto e^{ax+b} - c$.

   Nous allons résoudre l'équation $f(x) = 0$ *(d'inconnue* $x \in \mathbb{R}$*) pour montrer qu'elle possède une unique solution.*

   Soit $x \in \mathbb{R}$. *On a*

$$\begin{aligned} f(x) = 0 &\Leftrightarrow e^{ax+b} - c = 0 \\ &\Leftrightarrow e^{ax+b} = c \\ &\Leftrightarrow ax + b = \ln(c) && \textit{(car } c > 0\textit{)} \\ &\Leftrightarrow x = \frac{\ln(c) - b}{a}, && \textit{(car } a \neq 0\textit{)} \end{aligned}$$

   ce qui montre qu'il existe un unique x *tel que* $f(x) = 0$, *à savoir* $x = \dfrac{\ln(c) - b}{a}$.

2. (a) Donner un exemple d'ensemble $\mathscr{F} \subseteq \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ vérifiant **(Z)** mais pas **(ZU)**.

   Considérons $\mathscr{F} = \{ \sin \}$.

   $\mathscr{F}$ **vérifie (Z).** *Soit* $f \in \mathscr{F}$. *On a donc* $f = \sin$.

   On a donc $f(\pi) = 0$, *ce qui montre* ***(ZU)*** *(on a montré* $\exists x \in \mathbb{R} : f(x) = 0$ *en constatant que* π *convient).*

   $\mathscr{F}$ **ne vérifie pas (ZU).** *On va exhiber une fonction* $f \in \mathscr{F}$ *qui ne possède pas un unique zéro.*

   Naturellement (on n'a pas le choix...), on va prendre $f = \sin$, *qui appartient bien à* $\mathscr{F}$.

   Comme $f(\pi) = f(2\pi) = 0$, *l'assertion* $\exists! x \in \mathbb{R} : f(x) = 0$ *est fausse, ce qui conclut.*

   (b) Votre exemple vérifie-t-il **(ZG)** ?

   *Oui !** *Montrons-le.*

   Candidat : $x = \pi$.

   - *On a bien* $x \in \mathbb{R}$.
   - *Soit* $f \in \mathscr{F}$. *On a donc* $f = \sin$. *Ainsi,* $f(x) = \sin(\pi) = 0$, *ce qui conclut.*

*. Notons que cela est spécifique à mon exemple : d'autres exemples d'ensembles $\mathscr{F}$ vérifiant **(Z)** mais pas **(ZU)** peuvent très bien ne pas vérifier **(ZG)**.

3. Soit $\mathscr{F} \subseteq \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$. Montrer **(ZG)** $\Rightarrow$ **(Z)**.

   *Supposons **(ZG)**. On peut donc trouver* $x_0 \in \mathbb{R}$ *tel que* $\forall f \in \mathscr{F}, f(x_0) = 0$ *(∗).*

   *Montrons **(Z)**.*

   Soit $f \in \mathscr{F}$*. Montrons* $\exists x \in \mathbb{R} : f(x) = 0$.

   Candidat : $x = x_0$.

   - *On a bien* $x \in \mathbb{R}$.
   - *D'après (∗), on a* $f(x_0) = 0$*, ce qui conclut.*

4. Pour tous $a \in \mathbb{R}$ et $\varphi \in \mathbb{R}$, on définit $h_{a,\varphi} : \begin{cases} \mathbb{R} \to & \mathbb{R} \\ x \mapsto & a\cos(x+\varphi). \end{cases}$

   Montrer que l'ensemble $\mathscr{F} = \left\{ h_{a,\varphi} \,\middle|\, a, \varphi \in \mathbb{R} \right\}$ vérifie **(Z)** mais pas **(ZG)**.

   $\mathscr{F}$ **vérifie (Z).** *Soit* $f \in \mathscr{F}$*. On peut donc trouver* $a, \varphi \in \mathbb{R}$ *tels que* $f = h_{a,\varphi}$.

   On a donc $f : x \mapsto a\cos(x+\varphi)$.

   Montrons $\exists x \in \mathbb{R} : f(x) = 0$.

   Candidat : $x = \dfrac{\pi}{2} - \varphi$.

   - *On a bien* $x \in \mathbb{R}$.
   - *On a* $f(x) = a\cos\left(\left(\dfrac{\pi}{2} - \varphi\right) + \varphi\right) = a\cos\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 0$.

   $\mathscr{F}$ **ne vérifie pas (ZG).** *Montrons la négation de **(ZG)**, c'est-à-dire* $\forall x \in \mathbb{R}, \exists f \in \mathscr{F} : f(x) \neq 0$.

   Avant de nous lancer dans la démonstration proprement dite, remarquons que $\mathscr{F}$ *contient deux éléments particuliers :*

   - $h_{1,0} : x \mapsto \cos(x)$*, donc* $\cos \in \mathscr{F}$ *;*
   - $h_{1,-\pi/2} : x \mapsto \cos\left(x - \dfrac{\pi}{2}\right) = \sin(x)$*, donc* $\sin \in \mathscr{F}$.

   Passons maintenant à la démonstration.

   Soit $x \in \mathbb{R}$.

   On a $\cos(x)^2 + \sin(x)^2 = 1$*, donc on ne peut pas avoir à fois* $\cos(x) = 0$ *et* $\sin(x) = 0$*. Dit autrement, on sait que* $\cos(x) \neq 0$ *ou* $\sin(x) \neq 0$*. On distingue alors deux cas :*

   - *si* $\cos(x) \neq 0$*, on a démontré* $\exists f \in \mathscr{F} : f(x) \neq 0$ *(*$f = \cos$ *convient) ;*
   - *si* $\sin(x) \neq 0$*, on a démontré* $\exists f \in \mathscr{F} : f(x) \neq 0$ *(*$f = \sin$ *convient).*

   Comme tous les cas sont couverts, cela conclut la démonstration.

5. Soit $\mathscr{F} \subseteq \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$. On suppose :

   - que $\mathscr{F}$ vérifie **(ZU)** ;
   - que $\forall f \in \mathscr{F}, \forall x \in \mathbb{R}, f(x) \geqslant 0$;
   - que $\mathscr{F}$ est stable par somme, c'est-à-dire que $\forall f, g \in \mathscr{F}, f + g \in \mathscr{F}$.

   Montrer qu'alors $\mathscr{F}$ vérifie **(ZG)**.

   On distingue deux cas, dont le premier est un peu idiot.

   - *Si* $\mathscr{F} = \varnothing$*, alors* $\mathscr{F}$ *vérifie tautologiquement **(ZG)** : le candidat* $x = 0$ *convient par exemple, car la* $\forall$*-assertion vide* $\forall f \in \mathscr{F}, f(0) = 0$ *est tautologiquement vraie.*

- *Supposons maintenant $\mathscr{F} \neq \varnothing$. On peut donc trouver un élément $g_0 \in \mathscr{F}$. En appliquant **(ZU)** à cette fonction $g_0 \in \mathscr{F}$, on sait pouvoir trouver un (unique) réel $z_0 \in \mathbb{R}$ tel que $g_0(z_0) = 0$.*

  *Montrons maintenant **(ZG)**, c'est-à-dire $\exists x \in \mathbb{R} : \forall f \in \mathscr{F}, f(x) = 0$.*

  ***Candidat :** $x = z_0$.*

  - *On a bien $z_0 \in \mathbb{R}$.*
  - *Soit $f \in \mathscr{F}$. Montrons $f(z_0) = 0$.*

    *Par hypothèse, $f + g_0 \in \mathscr{F}$. En appliquant **(ZU)** à cet élément de $\mathscr{F}$, on peut trouver un nombre réel $x' \in \mathbb{R}$ tel que $(f + g_0)(x') = 0$, c'est-à-dire $f(x') + g_0(x') = 0$.*

    Comme les deux fonctions f et g_0 sont à valeurs positives, on sait que $f(x'), g_0(x') \geqslant 0$. L'égalité $f(x') + g_0(x') = 0$ force donc † $f(x') = g_0(x') = 0$.

    Par unicité du zéro de f, on en déduit $x' = z_0$. Ainsi, on a montré $g_0(z_0) = g_0(x') = 0$, ce qui conclut.

6. La question précédente reste-t-elle valable si l'on remplace **(ZU)** par **(Z)** ?

Elle ne l'est pas, mais il n'est pas si facile de trouver un contre-exemple. En voici un : on note $\mathscr{F}$ l'ensemble des fonctions à valeurs positives « ultimement nulles », c'est-à-dire nulles à partir d'un certain nombre réel. En symboles :

$$\mathscr{F} = \left\{ f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \,\middle|\, \forall x \in \mathbb{R}, f(x) \geqslant 0 \quad \text{et} \quad \exists a \in \mathbb{R} : \forall x \in [a, +\infty[, f(x) = 0 \right\}.$$

- *L'ensemble $\mathscr{F}$ vérifie **(Z)**. Montrons-le.*

  Soit $f \in \mathscr{F}$. Par hypothèse, on peut trouver $a \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in [a, +\infty[, f(x) = 0$.

  A fortiori, $f(a) = 0$, *ce qui montre $\exists x \in \mathbb{R} : f(x) = 0$.*
- *L'assertion $\forall f \in \mathscr{F}, f(x) \geqslant 0$ est claire, par définition de $\mathscr{F}$.*
- *Montrons que $\mathscr{F}$ est stable par somme. Soit $f, g \in \mathscr{F}$. On peut donc trouver $a_f, a_g \in \mathbb{R}$ tels que $\forall x \in [a_f, +\infty[, f(x) = 0$ et $\forall x \in [a_g, +\infty[, g(x) = 0$.*

  Posons $a = \max(a_f, a_g)$, et montrons $\forall x \in [a, +\infty[, (f + g)(x) = 0$.

  Soit $x \geqslant a$. Comme $x \geqslant a \geqslant a_f$, on a $f(x) = 0$. Comme $x \geqslant a \geqslant a_g$, on a $g(x) = 0$. On en déduit que $(f + g)(x) = f(x) + g(x) = 0$, ce qui conclut.
- *Montrons que $\mathscr{F}$ ne vérifie pas **(ZG)**, c'est-à-dire $\forall x \in \mathbb{R}, \exists f \in \mathscr{F} : f(x) \neq 0$.*

  Soit $x \in \mathbb{R}$. On définit $f : \begin{cases} \mathbb{R} \to & \mathbb{R} \\ t \mapsto & \begin{cases} 1 & \textit{si } t \leqslant x \\ 0 & \textit{si } t > x. \end{cases} \end{cases}$

  On va montrer que cette fonction convient.

  - *Montrons $f \in \mathscr{F}$.*
    - ▹ *La fonction f prend uniquement les valeurs 0 et 1, donc elle est à valeurs positives.*
    - ▹ *On a clairement $\forall t \in [x + 1, +\infty[, f(t) = 0$, ce qui conclut.*
  - *Par construction de f, on a $f(x) = 1 \neq 0$.*

†. Si deux nombres positifs a et b vérifient $a + b = 0$, alors $a = b = 0$. On peut utiliser cet argument sans le redémontrer à chaque fois tant il est classique – et important. Une démonstration formelle peut être la suivante : comme $b \geqslant 0$, on a $a = -b \leqslant 0$. Comme on sait par ailleurs que $a \geqslant 0$, on en déduit $a = 0$ « par double inégalité ». On en déduit alors $b = a + b = 0$.

Exercice 3

Étant donné deux ensembles $A, B \subseteq \mathbb{N}$, on notera $A \preccurlyeq B$ si $\big(A \subseteq B$ et $\forall x \in A, \forall y \in B \setminus A, x < y\big)$.

1. On note $I = \left\{2n+1 \,\middle|\, n \in \mathbb{N}\right\}$ l'ensemble des nombres impairs. A-t-on $I \preccurlyeq \mathbb{N}$? et $\mathbb{N} \preccurlyeq I$?

   ► *On n'a pas* $I \preccurlyeq \mathbb{N}$*, même si* $I \subseteq \mathbb{N}$*. Montrons en effet la négation de* $\forall x \in I, \forall y \in \mathbb{N} \setminus I, x < y$*, c'est-à-dire* $\exists x \in I : \exists y \in \mathbb{N} \setminus I : x \geqslant y$.

   Candidats : $x = 1$ *et* $y = 0$.

   - *Il est clair que* $x = 2 \times 0 + 1 \in I$ *et que* $0 \in \mathbb{N} \setminus I$.
   - *On a bien* $1 \geqslant 0$.

   ► *On n'a pas* $\mathbb{N} \preccurlyeq I$*. En effet, le fait que* $0 \in \mathbb{N}$ *mais* $0 \notin I$ *montre que* $\mathbb{N} \not\subseteq I$.

2. Existe-t-il un ensemble $M \in \mathscr{P}(\mathbb{N})$ tel que $\forall A \in \mathscr{P}(\mathbb{N}), M \preccurlyeq A$?

   Oui, l'ensemble $M = \varnothing$ *convient.* ‡

   Soit $A \in \mathscr{P}(\mathbb{N})$.

   ► *On sait que* $\varnothing \subseteq A$ *(c'est la* $\forall$*-assertion vide* $\forall x \in \varnothing, x \in A$*) ;*

   ► *l'assertion* $\forall x \in \varnothing, \forall y \in \underbrace{A \setminus \varnothing}_{=A}, x < y$ *est vraie, car c'est une* $\forall$*-assertion vide.*

   On en déduit $\varnothing \preccurlyeq A$*, ce qui conclut.*

3. Montrer $\forall A, B, C \in \mathscr{P}(\mathbb{N}), \big(A \preccurlyeq B$ et $B \preccurlyeq C\big) \Rightarrow A \preccurlyeq C$.

   Soit $A, B, C \in \mathscr{P}(\mathbb{N})$ *tels que* $A \preccurlyeq B$ *et* $B \preccurlyeq C$*. Montrons* $A \preccurlyeq C$.

   ► *Les deux inclusions* $A \subseteq B$ *et* $B \subseteq C$ *donnent* $A \subseteq C$.

   ► *Soit* $x \in A$ *et* $y \in C \setminus A$*. On distingue deux cas :*

   - *Si* $y \in B$*, on a* $y \in B \setminus A$*. Comme* $A \preccurlyeq B$*, que* $x \in A$ *et que* $y \in B \setminus A$*, on a* $x < y$.
   - *Si* $y \notin B$*, on a* $y \in C \setminus B$*. Comme* $B \preccurlyeq C$*, que* $x \in B$ *(car* $x \in A$ *et* $A \subseteq B$*) et que* $y \in C \setminus B$*, on a* $x < y$.

   Dans les deux cas, on a donc montré $x < y$*, ce qui conclut.*

4. Soit $A \in \mathscr{P}(\mathbb{N})$. Montrer que les deux assertions suivantes sont équivalentes :
   (i) $\forall B \in \mathscr{P}(\mathbb{N}), A \preccurlyeq B \Rightarrow A = B$;
   (ii) $\forall m \in \mathbb{N}, \exists a \in A, a \geqslant m$.

   On va procéder par double implication, mais montrer chaque implication par contraposée. Autrement dit, on va montrer non((ii)) $\Rightarrow$ non((i)) *(au lieu de l'implication directe) et* non((i)) $\Rightarrow$ non((ii)) *(au lieu de la réciproque).*

   ► *Supposons* non((ii))*. On peut donc trouver* $m \in \mathbb{N}$ *tel que* $\forall a \in A, a < m$.

   Montrons non((i))*, c'est-à-dire* $\exists B \in \mathscr{P}(\mathbb{N}) : A \preccurlyeq B$ et $A \neq B$.

   Candidat : $B = A \cup \{m\}$.

   - *On a bien* $B \in \mathscr{P}(\mathbb{N})$.
   - *Montrons* $B \preccurlyeq A$.
     - ▷ *On a* $A \subseteq B$.
     - ▷ *Soit* $x \in A$ *et* $y \in B \setminus A$*. Alors* $y = m$*, et l'hypothèse sur* m *donne déjà* $a < m = y$.
   - *Enfin,* $m \in B$ *et* $m \notin A$*, donc* $A \neq B$.

‡. Et on peut montrer facilement que c'est le seul, mais la question n'était pas posée.

- *Supposons* $\text{non}((\text{i}))$. *On peut donc trouver* $B \in \mathscr{P}(\mathbb{N})$ *tel que* $A \leqslant B$ *et* $A \neq B$.

  En général, $A \neq B$ *signifie* $A \not\subseteq B$ *ou* $B \not\subseteq A$. *Ici, on sait que* $A \leqslant B$ *donc* a fortiori *que* $A \subseteq B$*, si bien que la seule possibilité est* $B \not\subseteq A$. *On peut donc trouver* $b \in B$ *tel que* $b \notin A$. *Autrement dit, on a l'appartenance* $b \in B \setminus A$.

  Montrons $\text{non}((\text{i}))$*, c'est-à-dire* $\exists m \in \mathbb{N} : \forall a \in A, t < m$.

  Candidat : $m = b$.

  - *On a bien* $b \in \mathbb{N}$.
  - *Comme* $b \in B \setminus A$*, la relation* $A \leqslant B$ *donne en particulier* $\forall a \in A, a < b$*, ce qui conclut.*

Remarque. *En termes savants, on a montré que les* éléments maximaux *de* l'ensemble ordonné $(\mathscr{P}(\mathbb{N}), \leqslant)$ *sont exactement les ensembles infinis.*

5. Soit $A, B, C \in \mathscr{P}(\mathbb{N})$ tels que $A \leqslant C$ et $B \leqslant C$. Montrer que $A \leqslant B$ ou $B \leqslant A$.

- *Commençons par montrer* $A \subseteq B$ ou $B \subseteq A$.

  Supposons $A \not\subseteq B$. *On peut donc trouver* $a_0 \in A$ *tel que* $a_0 \notin B$. *Montrons* $B \subseteq A$.

  Soit $b \in B$.

  L'élément a_0 *appartient à* A*, donc à* C *(car l'hypothèse* $A \leqslant C$ *entraîne notamment* $A \subseteq C$*). Comme il n'appartient pas à* B*, on a* $a_0 \in C \setminus B$.

  Comme $b \in B$ *et* $a_0 \in C \setminus B$*, l'hypothèse* $B \leqslant C$ *entraîne* $b < a_0$.

  Si (par l'absurde) b *n'appartenait pas à* A*, il s'agirait d'un élément de* $B \setminus A$ *et on aurait* a fortiori $b \in C \setminus A$. *On aurait dans ce cas deux éléments* $a_0 \in A$ *et* $b \in C \setminus A$ *tels que* $b < a_0$*, ce qui contredit l'hypothèse* $A \leqslant C$.

  On a donc montré $b \in A$*, ce qui conclut.*

- *Dans la suite, on suppose que* $A \subseteq B$ *et on montre* $A \leqslant B$. *L'autre cas (si* $B \subseteq A$*, alors* $B \leqslant A$*) étant parfaitement analogue, cela conclura.*

  Soit donc $a \in A$ *et* $b \in B \setminus A$. *Montrons* $a < b$.

  Comme $B \leqslant C$*, on a* $B \subseteq C$ *et donc* $b \in C$. *Ainsi,* $b \in C \setminus A$. *Comme* $A \leqslant C$*, les appartenances* $a \in A$ *et* $b \in C \setminus A$ *entraînent* $a < b$*, ce qui conclut.*