Première composition de mathématiques

Durée : *2 heures.*

Toute sortie est interdite pendant les dix dernières minutes.

Sauf mention explicite du contraire, tout doit toujours être parfaitement justifié. Par exemple, si une question vous demande de « trouver un objet O *vérifiant la propriété* P *», la démonstration de la propriété* P *doit être donnée et parfaitement rigoureuse : la simple description de* O *ne rapportera guère de points...*

*Les documents, calculatrices, etc. sont **interdits**.*

Consignes générales de présentation

La présentation de la copie est prise en compte dans l'évaluation.

- *Ne composez pas sur la première page, ce qui me permettra d'écrire mes commentaires.*
- *Merci d'encadrer ou de souligner vos résultats.*
- *Numérotez vos copies doubles, et rendez-les dans l'ordre, la première servant de chemise pour les suivantes, qui ne seront pas imbriquées les unes dans les autres.*
- *Les parties trop difficiles à lire de votre copie ne seront pas lues.*

Conseils pour ce premier devoir

- *Malgré les apparences, le sujet est long ! Ne vous laissez pas impressionner : l'important est de faire le mieux possible les questions que vous traitez, même si ça n'est qu'une petite partie du sujet. Les premières questions seront de toute façon prépondérantes dans le barème.*
- *Une **très grande** part de l'évaluation porte sur la rigueur logique de vos raisonnements. Je serai donc impitoyable avec le respect des règles de logique vues en cours.*
- *Le premier devoir de maths de prépa est un moment un peu impressionnant mais après tout, il s'agit simplement de faire des maths, ce que vous savez bien faire, et la note aura un impact négligeable sur votre vie :* don't panic!

Exercice 1

Les deux questions sont indépendantes.

1. On considère les deux assertions suivantes :
   (☺) $\forall x \in \mathbb{R}, \big(\forall y \in \mathbb{R}, xy = 0\big) \Rightarrow x = 0.$
   (☹) $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, \big(xy = 0 \Rightarrow x = 0\big).$

   (a) Écrire les négations des deux assertions.
   (b) Montrer (en suivant scrupuleusement les canevas de démonstration) que (☺) est vraie et que (☹) est fausse.
2. Montrer $\forall \theta \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, |\sin(n\theta)| \leqslant n\,|\sin(\theta)|$.

Exercice 2

On rappelle que $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ désigne l'ensemble de toutes les fonctions $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Dans cet exercice, on considèrera des parties $\mathscr{F}$ de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, c'est-à-dire des ensembles $\mathscr{F}$ composés de fonctions $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Parmi toutes les propriétés que peut posséder un tel ensemble, on en nomme trois, que l'on présente sous forme d'assertions quantifiées :
(Z) $\forall f \in \mathscr{F}, \exists x \in \mathbb{R} : f(x) = 0;$
(ZU) $\forall f \in \mathscr{F}, \exists! x \in \mathbb{R} : f(x) = 0;$
(ZG) $\exists x \in \mathbb{R} : \forall f \in \mathscr{F}, f(x) = 0.$

1. Étant donné trois réels strictement positifs $a, b, c \in \mathbb{R}_+^*$, on définit la fonction $g_{a,b,c} : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto e^{ax+b} - c. \end{cases}$

   Montrer que l'ensemble $\mathscr{F} = \left\{ g_{a,b,c} \;\middle|\; a, b, c \in \mathbb{R}_+^* \right\}$ vérifie la propriété **(ZU)**.
2. (a) Donner un exemple d'ensemble $\mathscr{F} \subseteq \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ vérifiant **(Z)** mais pas **(ZU)**.
   (b) Votre exemple vérifie-t-il **(ZG)** ?
3. Soit $\mathscr{F} \subseteq \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$. Montrer **(ZG)** $\Rightarrow$ **(Z)**.
4. Pour tous $a \in \mathbb{R}$ et $\varphi \in \mathbb{R}$, on définit $h_{a,\varphi} : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto a\cos(x + \varphi). \end{cases}$

   Montrer que l'ensemble $\mathscr{F} = \left\{ h_{a,\varphi} \;\middle|\; a, \varphi \in \mathbb{R} \right\}$ vérifie **(Z)** mais pas **(ZG)**.
5. Soit $\mathscr{F} \subseteq \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$. On suppose :
   - que $\mathscr{F}$ vérifie **(ZU)** ;
   - que $\forall f \in \mathscr{F}, \forall x \in \mathbb{R}, f(x) \geqslant 0;$
   - que $\mathscr{F}$ est stable par somme, c'est-à-dire que $\forall f, g \in \mathscr{F}, f + g \in \mathscr{F}$.

   Montrer qu'alors $\mathscr{F}$ vérifie **(ZG)**.
6. La question précédente reste-t-elle valable si l'on remplace **(ZU)** par **(Z)** ?

Exercice 3

Étant donné deux ensembles $A, B \subseteq \mathbb{N}$, on notera $A \trianglelefteq B$ si $\big(A \subseteq B \text{ et } \forall x \in A, \forall y \in B \setminus A, x < y\big)$.

1. On note $I = \left\{ 2n + 1 \;\middle|\; n \in \mathbb{N} \right\}$ l'ensemble des nombres impairs. A-t-on $I \trianglelefteq \mathbb{N}$? et $\mathbb{N} \trianglelefteq I$?
2. Existe-t-il un ensemble $M \in \mathscr{P}(\mathbb{N})$ tel que $\forall A \in \mathscr{P}(\mathbb{N}), M \trianglelefteq A$?
3. Montrer $\forall A, B, C \in \mathscr{P}(\mathbb{N}), \big(A \trianglelefteq B \text{ et } B \trianglelefteq C\big) \Rightarrow A \trianglelefteq C$.
4. Soit $A \in \mathscr{P}(\mathbb{N})$. Montrer que les deux assertions suivantes sont équivalentes :
   (i) $\forall B \in \mathscr{P}(\mathbb{N}), A \trianglelefteq B \Rightarrow A = B;$
   (ii) $\forall m \in \mathbb{N}, \exists a \in A, a \geqslant m.$
5. Soit $A, B, C \in \mathscr{P}(\mathbb{N})$ tels que $A \trianglelefteq C$ et $B \trianglelefteq C$. Montrer que $A \trianglelefteq B$ ou $B \trianglelefteq A$.