Première composition de mathématiques [corrigé]

Exercice 1

On définit une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ en posant $u_1 = 2$, $u_2 = 1$, puis $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_{n+2} = \dfrac{u_n\, u_{n+1}}{2u_n - u_{n+1}}$.

1. Donner dans un tableau (sans justification) les valeurs de u_n, pour $n \in [\![1, 5]\!]$.

   Après calcul, on obtient le tableau suivant.

n	1	2	3	4	5
u_n	2	1	$\dfrac{2}{3}$	$\dfrac{1}{2}$	$\dfrac{2}{5}$

2. Donner une expression simple de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, et la démontrer par récurrence.

   Pour $n \in \mathbb{N}^*$, *on note* $P(n)$ *l'assertion* $u_n = \dfrac{2}{n}$. *Montrons* $\forall n \in \mathbb{N}^*, P(n)$ *par récurrence double.*

   Initialisation. *La définition de la suite* u *donne* $u_1 = 2 = \dfrac{2}{1}$, *ce qui montre* $P(1)$ *et* $u_2 = 1 = \dfrac{2}{2}$, *ce qui montre* $P(2)$.

   Hérédité. *Soit* $n \in \mathbb{N}^*$ *tel que* $P(n)$ *et* $P(n+1)$. *On a alors*

$$
\begin{aligned}
u_{n+2} &= \frac{u_n\, u_{n+1}}{2u_n - u_{n+1}} && \textit{(par définition de } u\textit{)}\\
&= \frac{\frac{2}{n}\,\frac{2}{n+1}}{\frac{4}{n} - \frac{2}{n+1}} && \textit{(d'après } P(n) \textit{ et } P(n+1)\textit{)}\\
&= \frac{4}{4(n+1) - 2n}\\
&= \frac{4}{2n+4}\\
&= \frac{2}{n+2},
\end{aligned}
$$

   ce qui montre $P(n+2)$ *et clôt la récurrence.*

Exercice 2. Couples exclusifs.

Soit $A, B \in \mathscr{P}(\mathbb{N})$ (il s'agit donc de deux ensembles constitués d'entiers naturels).

1. Rappeler la définition de $A \subseteq B$ (sous forme d'une assertion quantifiée) et écrire sa négation.

Par définition, $A \subseteq B$ *signifie* $\forall a \in A, a \in B$.

Sa négation est donc $\exists a \in A : a \notin B$.

Dans la suite du problème, on notera $A \not\subseteq B$ la négation de $A \subseteq B$.

On dira que (A, B) est *un couple exclusif* si l'on a

$$\forall X \in \mathscr{P}(\mathbb{N}), A \subseteq X \Leftrightarrow X \not\subseteq B.$$

2. Montrer que $\big(\{0\}, \mathbb{N}^*\big)$ est un couple exclusif.

   Soit $X \in \mathscr{P}(\mathbb{N})$*. Montrons* $\{0\} \subseteq X \Leftrightarrow X \not\subseteq \mathbb{N}^*$ *par double implication.*

   Sens direct. *Supposons* $\{0\} \subseteq X$.

   On a ainsi $0 \in X$ *mais* $0 \notin \mathbb{N}^*$*, ce qui démontre que* $X \not\subseteq \mathbb{N}^*$.

   Sens réciproque. *Supposons* $X \not\subseteq \mathbb{N}^*$*. On peut donc trouver* $n \in X$ *tel que* $n \notin \mathbb{N}^*$.

   Comme $n \in X$ *et que* $X \in \mathscr{P}(\mathbb{N})$*, on sait que* n *est un entier naturel. L'hypothèse* $n \notin \mathbb{N}^*$ *force donc* $n = 0$.

   On a donc $0 \in X$*, ce qui montre* $\{0\} \subseteq X$.

Dans la suite de l'exercice, on suppose que (A, B) est un couple exclusif.

3. Montrer que l'on peut trouver un entier $x \in A$ tel que $x \notin B$.

   Il s'agit de démontrer $\exists x \in A : x \notin B$*, ce qui équivaut à* $A \not\subseteq B$.

   Or, il est automatique que $A \subseteq A$*. En appliquant la définition des couples exclusifs à* $X = A$*, on en déduit* $A \not\subseteq B$*, ce qui conclut.*

4. Montrer que $A = \{x\}$ et $B = \mathbb{N} \setminus \{x\}$.

   - *Montrons* $A = \{x\}$ *par double inclusion.*
     - *La question précédente montre* $x \in A$*, c'est-à-dire* $\{x\} \subseteq A$.
     - *La question précédente montre* $x \notin B$*. On en déduit* $\{x\} \not\subseteq B$*. En appliquant la définition des couples exclusifs à* $X = \{x\}$*, on obtient que* $A \subseteq \{x\}$.
   - *Montrons* $B = \mathbb{N} \setminus \{x\}$ *par double inclusion.*
     - *La question précédente montre* $x \notin B$*, c'est-à-dire* $B \subseteq \mathbb{N} \setminus \{x\}$.
     - *Comme* $A = \{x\}$*, on a* $A \not\subseteq \mathbb{N} \setminus \{x\}$.

       La définition des couples exclusifs, appliquée à $X = \mathbb{N} \setminus \{x\}$*, donne* $A \subseteq \mathbb{N} \setminus \{x\} \Leftrightarrow \mathbb{N} \setminus \{x\} \not\subseteq B$*. Comme l'assertion de gauche est fausse, celle de droite l'est aussi, ce qui nous donne la dernière inclusion* $\mathbb{N} \setminus \{x\} \subseteq B$.

Problème. Quelques remarques sur les suites strictement croissantes.

Dans ce problème, on considèrera que la (stricte) croissance est définie comme suit :

- une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite *croissante* si $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} \geqslant u_n$;
- une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite *strictement croissante* si $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} > u_n$.

En particulier, on voit (et on pourra utiliser) qu'une suite strictement croissante est croissante.

Partie I. Généralités.

1. Donner un exemple de suite strictement croissante, et un exemple de suite non strictement croissante.

   Exemple de suite strictement croissante. *Montrons que* $(n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est strictement croissante, c'est-à-dire* $\forall n \in \mathbb{N}, n+1 > n$.

   Soit $n \in \mathbb{N}$.

   On a $1 > 0$, *donc* $n+1 > n$ *en ajoutant* n *de part et d'autre.*

   Exemple de suite qui n'est pas strictement croissante. *Montrons que* $(0)_{n\in\mathbb{N}}$ *n'est pas strictement croissante, c'est-à-dire* $\exists n \in \mathbb{N} : 0 \leqslant 0$.

   Candidat : $n = 0$.

   - *On a bien* $0 \in \mathbb{N}$.
   - *On a bien* $0 \leqslant 0$...

2. (a) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite. Écrire avec des quantificateurs l'assertion « $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante à partir d'un certain rang. »

   Cette assertion s'écrit $\exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geqslant N, u_{n+1} > u_n$.

   (b) Montrer que la suite $\left((-1)^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas strictement croissante à partir d'un certain rang.

   En niant l'assertion précédente, il s'agit de montrer $\forall N \in \mathbb{N}, \exists n \geqslant N : (-1)^{n+1} \leqslant (-1)^n$.

   Candidat : $n = 2N$.

   - *On a* $N \geqslant 0$, *donc* $n = N + N \geqslant N$.
   - *On a* $(-1)^{n+1} = (-1)^{2N+1} = -1 \leqslant 1 = (-1)^{2N} = (-1)^n$.

3. (a) Montrer que le produit de deux suites strictement croissantes à valeurs strictement positives est encore strictement croissant.

   Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *deux suites strictement croissantes à valeurs strictement positives. Montrer que* $(u_n\, v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est strictement croissante.*

   Soit $n \in \mathbb{N}$. *Montrons que* $u_n\, v_n < u_{n+1}\, v_{n+1}$.

   Comme $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est à valeurs* > 0, *on a* $v_n > 0$. *On peut donc multiplier l'inégalité* $u_n < u_{n+1}$ *(stricte croissance de* u*, appliquée en* n*) par* v_n *et en déduire* $u_n\, v_n < u_{n+1}\, v_n$.

   De même, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est à valeurs* > 0 *donc* $u_{n+1} > 0$ *et on peut multiplier l'inégalité* $v_n < v_{n+1}$ *pour en déduire* $u_{n+1}\, v_n < u_{n+1}\, v_{n+1}$.

   En combinant les deux inégalités précédentes, on obtient $u_n\, v_n < u_{n+1}\, v_{n+1}$, *ce qui conclut.*

Remarque. *Quand on est plus grand, on condense ce raisonnement en écrivant :*

$$u_{n+1}\, v_{n+1} - u_n\, v_n = \underbrace{u_{n+1}}_{>0}\, \underbrace{(v_{n+1} - v_n)}_{>0} + \underbrace{(u_{n+1} - u_n)}_{>0}\, \underbrace{v_n}_{>0} > 0.$$

On en reparlera.

(b) Montrer que l'on ne peut pas retirer l'hypothèse « à valeurs strictement positives » dans la question précédente.

Il s'agit de trouver deux suites strictement croissantes $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dont le produit $(u_n\, v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas strictement croissant.

Candidats : $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} = (v_n)_{n\in\mathbb{N}} = \left(-e^{-n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$.

- ► *Vérifions que la suite* $\left(-e^{-n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *est strictement croissante.*

  Soit $n \in \mathbb{N}$.

  On a $n < n+1$, *donc* $-n > -(n+1)$.

  Par stricte croissance de l'exponentielle, on en déduit $e^{-n} > e^{-(n+1)}$.

  Ainsi, $u_n = -e^{-n} < -e^{-(n+1)} = u_{n+1}$.
  Montrons que le produit n'est pas strictement croissant : $\exists n \in \mathbb{N} : u_n\, v_n \geqslant u_{n+1}\, v_{n+1}$.

  Candidat : $n = 0$.

  - *Clairement,* $n \in \mathbb{N}$.
  - *On a* $u_n\, v_n = \left(-e^{-0}\right)^2 = 1$ *et* $u_{n+1}\, v_{n+1} = \left(-e^{-1}\right)^2 = e^{-2}$, *donc* $u_n\, v_n \geqslant u_{n+1}\, v_{n+1}$ *(par exemple par croissance de la fonction exponentielle).*

Remarque. *L'exemple de* $\left((n+1)^2\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $\left(-\dfrac{1}{n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *montre qu'il n'est même pas suffisant que l'une des suites soit* > 0.

4. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite.

(a) On suppose (dans cette question uniquement) $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ strictement croissante. Montrer

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall k \in \mathbb{N}^*, u_{n+k} > u_n.$$

Soit $n \in \mathbb{N}$.

Pour $k \in \mathbb{N}^*$, *notons* $P(k)$ *l'assertion* $u_{n+k} > u_n$. *Montrons* $\forall k \in \mathbb{N}^*, P(k)$ *par récurrence.*

Initialisation. *En appliquant la stricte croissance de* u *à l'entier* n, *on obtient* $u_{n+1} > u_n$, *c'est-à-dire* $P(1)$.

Hérédité. *Soit* $k \in \mathbb{N}^*$ *tel que* $P(k)$. *Montrons* $P(k+1)$.

On a

$$\begin{aligned} u_{n+k+1} &> u_{n+k} && \text{(stricte croissance de } u \text{ appliquée en } n+k\text{)} \\ &> u_n, && \text{(d'après } P(k)\text{)} \end{aligned}$$

ce qui montre $P(n+k+1)$ *et clôt la récurrence.*

(b) En déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante si et seulement si

$$\forall n, m \in \mathbb{N}, m > n \Rightarrow u_m > u_n.$$

On procède par double implication.

Sens direct. *Supposons* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *strictement croissante.*

Montrons $\forall n, m \in \mathbb{N}, m > n \Rightarrow u_m > u_n$.

Soit $n, m \in \mathbb{N}$ *tels que* $m > n$.

En posant $k = m - n$, *on a bien* $n + k = m$ *et* $k \in \mathbb{N}^*$.

D'après la question précédente, on en déduit que $u_m = u_{n+k} > u_n$.

Sens réciproque. *Supposons* $\forall n, m \in \mathbb{N}, m > n \Rightarrow u_m > u_n$. *Montrons que* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est strictement croissante.*

Soit $n \in \mathbb{N}$.

En appliquant l'hypothèse à n *et* $m = n + 1$, *qui vérifient bien* $m > n$, *on obtient directement* $u_{n+1} > u_n$.

5. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite strictement croissante. Montrer que

$$\forall n, m \in \mathbb{N}, n \leqslant m \Leftrightarrow u_n \leqslant u_m.$$

Soit $n, m \in \mathbb{N}$. *On montre l'équivalence* $n \leqslant m \Leftrightarrow u_n \leqslant u_m$ *par double implication.*

- *Supposons* $n \leqslant m$. *On distingue alors deux cas.*
  - *Si* $n = m$, *on a* $u_n = u_m$.
  - *Si* $n < m$, *on applique la question précédente et on obtient* $u_n < u_m$.

  Dans les deux cas, on a montré $u_n \leqslant u_m$.
- *Montrons l'implication* $u_n \leqslant u_m \Rightarrow n \leqslant m$ *par contraposée.*

  On suppose donc $n > m$.

  D'après la question précédente (appliquée à m *et* n *à la place de* n *et* m, *ce qui est troublant), on obtient* $u_n > u_m$ *par contraposée.*

Partie II. Une équivalence.

6. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes.
   (i) $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ s'annule au plus une fois.
   (ii) Il existe une suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $(u_n v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit strictement croissante.

On procède par double implication.

- *Supposons (i). On distingue alors deux cas.*
  - *Supposons d'abord que la suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *ne s'annule jamais.*

    On peut alors poser $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} = \left(\dfrac{n}{u_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$, *et l'on a* $(u_n v_n)_{n\in\mathbb{N}} = (n)_{n\in\mathbb{N}}$, *dont on a montré à la première question qu'il s'agissait d'une suite strictement croissante.*
  - *Supposons maintenant qu'il existe un unique entier en lequel la suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *s'annule, et notons-le* p.

    On peut alors définir une suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *en exigeant que*

    $$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{p\}, v_n = \frac{n-p}{u_n} \qquad \text{et} \qquad v_p = 0.$$

    Montrons alors $\forall n \in \mathbb{N}, u_n v_n = n - p$. *Soit* $n \in \mathbb{N}$.

▷ *Si* $n \neq p$, *on a* $u_n v_n = u_n \dfrac{n-p}{u_n} = n - p$ *;*

▷ *si* $n = p$, *on a* $u_n = 0$, *donc* $u_n v_n = 0 = n - p$.

Cela démontre que $(u_n v_n)_{n\in\mathbb{N}} = (n-p)_{n\in\mathbb{N}}$.

On montre alors, comme à la première question, que cette suite est strictement croissante, ce qui conclut.

- ▶ *Supposons maintenant (ii). On peut donc trouver une suite* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *telle que* $(u_n v_n)$ *soit strictement croissante.*

  On suit le canevas des démonstrations d'unicité. Soit $p, q \in \mathbb{N}$ *tels que* $u_p = u_q = 0$.

  - *Si (par l'absurde), on avait* $p < q$, *la question 5 entraînerait que* $u_p v_p < u_q v_q$, *ce qui contredit le fait que ces deux produits sont nuls.*
  - *La même démonstration, en échangeant le rôle de* p *et* q, *montre qu'il est également absurde que* $p > q$.

  Ainsi, $p = q$, *ce qui conclut.*

Partie III. Différences de deux suites strictement croissantes.

7. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite.

   (a) On définit la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par récurrence : $a_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}, a_{n+1} = 1 + a_n + |u_{n+1} - u_n|$. Montrer que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante.

   Soit $n \in \mathbb{N}$.

   On a $a_{n+1} - a_n = 1 + |u_{n+1} - u_n| > 0$, *donc* $a_n < a_{n+1}$.

   (b) Construire une suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ strictement croissante telle que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = a_n - b_n$.

   Candidat : *On pose* $(b_n)_{n\in\mathbb{N}} = (a_n - u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *(pas tellement le choix...).*

   - ▶ *Il s'agit maintenant de montrer que cette suite est strictement croissante.*

     Soit $n \in \mathbb{N}$. *On a*

     $$\begin{aligned} b_{n+1} - b_n &= (a_{n+1} - u_{n+1}) - (a_n - u_n) \\ &= \big(1 + a_n + |u_{n+1} - u_n|\big) - u_{n+1} - a_n + u_n \\ &= 1 + |u_{n+1} - u_n| - (u_{n+1} - u_n) \\ &\geqslant 1, \end{aligned}$$

     en appliquant l'inégalité $\forall x \in \mathbb{R}, x \leqslant |x|$ *au nombre réel* $u_{n+1} - u_n$.

     A fortiori, *on a montré* $b_{n+1} > b_n$.
   - ▶ *La construction de* $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *rend évident le fait que* $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = a_n - b_n$.

On dira qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est *à variation bornée* s'il existe deux suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ strictement croissantes **et majorées** telles que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = a_n - b_n$.

Les deux questions suivantes (indépendantes l'une de l'autre) explorent cette notion.

8. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_{2n-1} = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{2n} = 0$.

   On va montrer par l'absurde que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas à variation bornée. On suppose donc (par l'absurde) qu'il existe deux suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ strictement croissantes et majorées telles que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = a_n - b_n$.

(a) **Résultat auxiliaire.** Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $2\big(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\big) \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{n}}$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. *On a*

$$\begin{aligned}\sqrt{n+1} - \sqrt{n} &= \frac{\big(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\big)\big(\sqrt{n+1} + \sqrt{n}\big)}{\big(\sqrt{n+1} + \sqrt{n}\big)} \\ &= \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \\ &\leqslant \frac{1}{2\sqrt{n}},\end{aligned}$$

car $\sqrt{n+1} \geqslant \sqrt{n} \geqslant 0$ *(par croissance de la fonction racine carrée), d'où* $\sqrt{n+1} + \sqrt{n} \geqslant 2\sqrt{n}$*, ce qui donne le résultat par décroissance de la fonction inverse sur* $\mathbb{R}_+^*$.

(b) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, a_{2n+1} > a_{2n} + \dfrac{1}{\sqrt{n+1}}$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. *On a*

$$\begin{aligned}a_{2n+1} &= u_{2n+1} + b_{2n+1} \\ &= \frac{1}{\sqrt{n+1}} + b_{2n+1} && \text{car } 2n+1 = 2(n+1)-1 \\ &> \frac{1}{\sqrt{n+1}} + b_{2n} && \text{car } (b_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ croît strictement} \\ &> \frac{1}{\sqrt{n+1}} + a_{2n} && \text{car } a_{2n} - b_{2n} = u_{2n} = 0.\end{aligned}$$

(Notons que la dernière inégalité n'est stricte que par rapport au tout début du calcul : le dernier et l'avant-dernier termes de notre chaîne d'inégalités sont égaux.)

(c) En déduire $\forall n \in \mathbb{N}, a_{2n} \geqslant 2\sqrt{n+1} + a_0 - 2$, et conclure.

Pour $n \in \mathbb{N}$, *notons* $P(n)$ *l'assertion* $a_{2n} \geqslant 2\sqrt{n+1} + a_0 - 2$.

Montrons $\forall n \in \mathbb{N}, P(n)$ *par récurrence.*

Initialisation. *On a* $a_0 = 2\sqrt{1} + a_0 - 2$, *d'où l'inégalité* $P(0)$ *: c'est ce qui a forcé l'énoncé à exiger une inégalité large...*

Hérédité. *Soit* $n \in \mathbb{N}$ *tel que* $P(n)$. *On a alors*

$$\begin{aligned}a_{2(n+1)} = a_{2n+2} &> a_{2n+1} && \text{(stricte croissance)} \\ &> \frac{1}{\sqrt{n+1}} + a_{2n} && \text{(question précédente)} \\ &> 2\big(\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1}\big) + a_{2n} && \text{(inégalité auxiliaire)} \\ &> 2\big(\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1}\big) + 2\sqrt{n+1} + a_0 - 2 && \text{(d'après } P(n)) \\ &> 2\sqrt{n+2} + a_0 - 2,\end{aligned}$$

ce qui montre $P(n+1)$ *et clôt la récurrence.*

Cela nous donne la contradiction souhaitée : les résultats vus au lycée montrent que la suite $\big(2\sqrt{n+1} + a_0 - 2\big)_{n\in\mathbb{N}}$ *ne peut pas être majorée, et elle diverge d'ailleurs même vers* $+\infty$. *Pourtant, si* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *l'était, on pourrait trouver une constante* $M \in \mathbb{R}$ *telle que* $\forall k \in \mathbb{N}, a_k \leqslant M$, *ce qui entraînerait* a fortiori $\forall n \in \mathbb{N}, a_{2n} \leqslant M$, *puis le caractère majoré de* $\big(2\sqrt{n+1} + a_0 - 2\big)_{n\in\mathbb{N}}$, *absurde.*

9. Montrer que le produit de deux suites à variation bornée est encore à variation bornée.

Il y a une jolie difficulté dans cette question, qui est qu'une démonstration facile semble se dérouler toute seule, mais il faut être suffisamment rigoureux pour y détecter une erreur.

En maths, quand cela arrive, l'erreur est parfois fatale au raisonnement, mais il est aussi souvent possible de la « contourner » (on dit aussi un peu argotiquement que l'on « bouche le trou ») pour faire quand même marcher l'idée de départ. C'est ce qu'il se passe ici. Mais, avant de boucher le trou (ce qui nécessite un peu de créativité), encore faut-il le voir (ce qui nécessite de la rigueur) !

Ici, une démonstration fausse serait la suivante.

> *Soit* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *deux suites à variation bornée. Par définition, on peut donc trouver quatre suites strictement croissantes et bornées* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}}, (c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *telles que*
>
> $$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = a_n - b_n \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N}, v_n = c_n - d_n.$$
>
> *On en déduit que, pour tout* $n \in \mathbb{N}$,
>
> $$\begin{aligned} u_n\, v_n &= (a_n - b_n)(c_n - d_n) \\ &= a_n\, c_n - a_n\, d_n - b_n\, c_n + b_n\, d_n \\ &= \underbrace{(a_n\, c_n + b_n\, d_n)}_{=:\alpha_n} - \underbrace{(a_n\, d_n + b_n\, c_n)}_{=:\beta_n}. \end{aligned}$$
>
> *Comme toutes les suites en présence sont strictement croissantes et majorées, il en va de même, par opérations, des suites* $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$. *On en déduit que* $(u_n\, v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est à variation bornée, ce qui conclut.*

L'erreur est cachée dans ce « par opérations » pudique. Décortiquons ce qui est écrit.

- *Pour ce qui est de l'aspect borné,*
  - *il est effectivement vrai (mais pas complètement trivial, à cause des signes) que le produit de deux suites bornées est borné : on en déduit donc que les quatre suites* $(a_n\, c_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n\, d_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(a_n\, d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(b_n\, c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *sont bornées) ;*
  - *il est effectivement vrai (et facile) que la somme de deux suites bornées est bornée, donc* $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *sont bel et bien bornées.*
- *Le problème est pour la stricte croissance :*
  - *il est certes vrai (et facile) que la somme de deux suites strictement croissantes est croissante ;*
  - *mais il n'est pas vrai en général que le produit de deux suites strictement croissantes est strictement croissant, et la première partie du sujet l'a souligné.*

  On n'est donc pas a priori *capables de montrer que* $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *croissent strictement. Dans certains exemples, ce serait effectivement faux.*

Cependant, la première partie du sujet nous a donné la solution au problème en même temps qu'elle nous avertissait de son existence : si l'on part de quatre suites ***à valeurs strictement positives****, la démonstration ci-dessus est réparable. Il n'y a pas de raison* a priori *que les quatre suites que l'on a obtenues au début de la démonstration le soient, mais on peut au besoin les remplacer par d'autres qui le seront.*

On reprend donc, avec une démonstration qui est maintenant correcte.

> *Soit* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *deux suites à variation bornée. Par définition, on peut donc trouver quatre suites strictement croissantes et bornées* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}}, (c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *telles que*
>
> $$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = a_n - b_n \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N}, v_n = c_n - d_n.$$

On remarque que, pour toute constante λ*, on peut remplacer* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *par deux suites* $(a'_n)_{n\in\mathbb{N}} = (a_n+\lambda)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(b'_n)_{n\in\mathbb{N}} = (b_n+\lambda)_{n\in\mathbb{N}}$ *pour obtenir deux suites* $(a'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(b'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *qui sont toujours strictement croissantes et vérifient toujours la décomposition* $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = a'_n - b'_n$.

En choisissant λ *suffisamment grand, on peut imposer que* $a'_0 = a_0+\lambda$ *et* $b'_0 = b_0+\lambda$ *soient tous les deux* > 0 *: il suffit par exemple de prendre* $\lambda = \max(1-a_0, 1-b_0)$. *Comme les deux suites sont strictement croissantes, l'inégalité* $a'_0 > 0$ *entraîne même* $\forall n \in \mathbb{N}, a'_n > 0$*, et* idem *pour* $(b'_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Dans la suite, pour ne pas alourdir les notations, on continue à utiliser les notations $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *au lieu de leurs versions « primées », mais on suppose que les mesures ont été prises pour garantir que ces deux suites soient à valeurs* > 0. *Naturellement, on fait la même chose pour* $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

On reprend alors le calcul : pour tout $n \in \mathbb{N}$*,*

$$\begin{aligned} u_n\, v_n &= (a_n - b_n)(c_n - d_n) \\ &= a_n\, c_n - a_n\, d_n - b_n\, c_n + b_n\, d_n \\ &= \underbrace{(a_n\, c_n + b_n\, d_n)}_{=:\alpha_n} - \underbrace{(a_n\, d_n + b_n\, c_n)}_{=:\beta_n}. \end{aligned}$$

D'après la question 3a, les quatre suites $(a_n\, c_n)_{n\in\mathbb{N}}$*,* $(b_n\, d_n)_{n\in\mathbb{N}}$*,* $(a_n\, d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(b_n\, c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *sont strictement croissantes. Comme il est assez clair que la somme de deux suites strictement croissantes l'est encore, on en déduit que* $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *sont strictement croissantes.*

Les théorèmes d'opération sur les suites bornées montrent également que $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *restent bornées (c'est d'ailleurs plus facile à démontrer ici, grâce à la positivité).*

L'écriture $\forall n \in \mathbb{N}, u_n\, v_n = \alpha_n - \beta_n$ *montre alors que la suite* $(u_n\, v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est à variation bornée.*

Partie IV. Suites logarithmiques.

On va étudier dans cette partie des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ vérifiant

$$(\#) : \qquad \forall n, m \in \mathbb{N}^*, u_{nm} = u_n + u_m.$$

Le but principal est de montrer qu'une suite strictement croissante $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ vérifiant (#) est de la forme $\big(\lambda \ln(n)\big)_{n\in\mathbb{N}^*}$, pour un certain $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$.

10. **La raison pour laquelle on exclut** 0. Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite vérifiant $\forall n, m \in \mathbb{N}, v_{nm} = v_n + v_m$. Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est nulle.

    Soit $n \in \mathbb{N}$. *En appliquant la* $\forall$*-assertion à* n *et* $m = 0$*, on obtient* $v_0 = v_n + v_0$*, d'où l'on tire* $v_n = 0$.

11. On admet le résultat suivant, dit de *densité des rationnels* : $\forall x, y \in \mathbb{R}, x < y \Rightarrow]x, y[\cap \mathbb{Q} \neq \varnothing$.

    (a) Soit $a, b \in \mathbb{R}_+^*$. Montrer que, si $\forall k, \ell \in \mathbb{N}^*, \dfrac{k}{\ell} \leqslant a \Rightarrow \dfrac{k}{\ell} \leqslant b$, alors $a \leqslant b$.

    Si l'on n'a pas peur des grosses assertions quantifiées, l'énoncé nous demande de montrer

    $$\left(\forall k, \ell \in \mathbb{N}^*, \frac{k}{\ell} \leqslant a \Rightarrow \frac{k}{\ell} \leqslant b\right) \Rightarrow a \leqslant b.$$

On va ruser et démontrer plutôt la contraposée

$$a > b \Rightarrow \left(\exists k, \ell \in \mathbb{N}^* : \frac{k}{\ell} \leqslant a \text{ et } \frac{k}{\ell} > b\right).$$

Supposons donc $a > b$*. D'après le résultat admis, l'intersection* $]b, a[\cap \mathbb{Q}$ *n'est pas vide. On peut donc trouver un rationnel* $r \in]b, a[$.

Comme $r > b > 0$*, ce rationnel peut s'écrire comme le quotient de deux entiers strictement positifs : on peut trouver* $k, \ell \in \mathbb{N}^*$ *tels que* $r = \frac{k}{\ell}$.

On a donc $\frac{k}{\ell} > b$ *et* $\frac{k}{\ell} < a$*, ce qui est encore plus fort que l'inégalité large que l'on avait à démontrer.*

(b) Qu'en déduit-on si $a, b \in \mathbb{R}_+^*$ vérifient $\forall k, \ell \in \mathbb{N}^*, \frac{k}{\ell} \leqslant a \Leftrightarrow \frac{k}{\ell} \leqslant b$?

Supposons $\forall k, \ell \in \mathbb{N}^*, \frac{k}{\ell} \leqslant a \Leftrightarrow \frac{k}{\ell} \leqslant b$.

- A fortiori*, cela nous donne* $\forall k, \ell \in \mathbb{N}^*, \frac{k}{\ell} \leqslant a \Rightarrow \frac{k}{\ell} \leqslant b$*. D'après la question précédente, on sait donc que* $a \leqslant b$.
- *Le même raisonnement (en échangeant* a *et* b*, qui jouent des rôles symétriques) nous apprend que* $b \leqslant a$.

Ainsi, $a = b$.

Dans la fin de la partie, on considère une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ strictement croissante vérifiant (#).

12. Soit $p \geqslant 2$ un entier. Montrer qu'il existe $c_p \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $\forall k \in \mathbb{N}, u_{p^k} = c_p\, k$.

Candidat : $c_p = u_p$.

- *Il est déjà clair que* $c_p \in \mathbb{R}$*. On va attendre la fin de la démonstration pour établir l'inégalité* $c_p > 0$.
- *Pour* $k \in \mathbb{N}$*, on note* $P(k)$ *l'assertion* $u_{p^k} = c_p\, k$*, c'est-à-dire* $u_{p^k} = u_p\, k$*. Montrons* $\forall k \in \mathbb{N}, P(k)$ *par récurrence.*

  Initialisation. *Appliquons la propriété (#) à* $n = m = 1$*. On obtient* $u_1 = u_1 + u_1$*, d'où il vient* $u_1 = 0$*. Cela démontre bien* $P(0)$*, car* $p^0 = 1$.

  Hérédité. *Soit* $k \in \mathbb{N}$ *tel que* $P(k)$*. On a alors*

$$\begin{aligned} u_{p^{k+1}} = u_{p^k\, p} &= u_{p^k} + u_p && \textit{(d'après (\#))} \\ &u_p\, k + u_p && \textit{(d'après } P(k)\textit{)} \\ &= u_p\,(k+1), \end{aligned}$$

  ce qui montre $P(k+1)$ *et clôt la récurrence.*

- *Il reste à montrer que* $c_p = u_p$ *est strictement positif. Mais la stricte croissance et* $P(0)$ *le font immédiatement : comme* $p > 1$*, on a* $u_p > u_1 = 0$.

13. On se donne maintenant deux entiers $p, q \geqslant 2$ et on fixe $c_p, c_q \in \mathbb{R}_+^*$ comme dans la question précédente. Montrer que $\frac{c_p}{c_q} = \frac{\ln(p)}{\ln(q)}$.

Soit $k, \ell \in \mathbb{N}^*$*. On a*

$$\frac{k}{\ell} \leqslant \frac{\ln(p)}{\ln(q)} \Leftrightarrow k \ln(q) \leqslant \ell \ln(p) \qquad \textit{(car } \ell, \ln(q) > 0\textit{)}$$

$$
\begin{aligned}
&\Leftrightarrow p^k \leqslant q^\ell && \textit{(croissance de } \exp \textit{ et } \ln\textit{)}\\
&\Leftrightarrow u_{p^k} \leqslant u_{q^\ell} && \textit{(stricte croissance, cf. 5)}\\
&\Leftrightarrow c_p\, k \leqslant c_q\, \ell && \textit{(question précédente)}\\
&\Leftrightarrow \frac{k}{\ell} \leqslant \frac{c_q}{c_p} && \textit{(car } \ell, \ln(p) > 0\textit{).}
\end{aligned}
$$

On vient de montrer que $\forall k, \ell \in \mathbb{N}^*, \dfrac{k}{\ell} \leqslant \dfrac{\ln(p)}{\ln(q)} \Leftrightarrow \dfrac{k}{\ell} \leqslant \dfrac{c_q}{c_p}$. *La question 11b conclut alors.*

14. Déduire de ce qui précède l'existence de $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ telle que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*} = \big(\lambda \ln(n)\big)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

On reprend les notations de la question 12 : on peut trouver $c_2 > 0$ *tel que* $\forall k \in \mathbb{N}, u_{2^k} = c_2\, k$.

Candidat : $\lambda = \dfrac{c_2}{\ln(2)}$.

- *Comme* c_2 *et* $\ln(2)$ *sont strictement positifs, on a bien* $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$.
- *Soit* $n \in \mathbb{N}$.

  D'après la question 12, on peut trouver $c_n \in \mathbb{N}^*$ *tel que* $\forall k \in \mathbb{N}, u_{n^k} = c_n\, k$ *et la question précédente nous assure l'égalité* $\dfrac{c_n}{c_2} = \dfrac{\ln(n)}{\ln(2)}$.

  On en déduit $c_n = \dfrac{c_2}{\ln(2)} \ln(n) = \lambda \ln(n)$.

Remarque. *La démonstration montre que l'on aurait pu choisir* $\lambda = \dfrac{c_p}{\ln(p)}$ *pour n'importe quel* $p \geqslant 2$. *J'ai choisi mon préféré.*

15. Donner un exemple de suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ non monotone vérifiant (#).

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, *on note* v_n *l'exposant de 2 dans la décomposition en facteurs premiers (qui est bien défini, car le théorème fondamental de l'arithmétique affirme l'unicité de cette décomposition).*

Étant donné $n, m \in \mathbb{N}^*$, *on peut écrire deux décompositions*

$$n = 2^{v_n}\, 3^{\alpha_3}\, 5^{\alpha_5} \cdots p^{\alpha_p} \qquad \text{et} \qquad m = 2^{v_m}\, 3^{\beta_3}\, 5^{\beta_5} \cdots p^{\beta_p},$$

où $2, 3, \ldots, p$ *sont un certain nombre de nombres premiers distincts et les exposants* $\alpha_3, \ldots, \alpha_p, \beta_3, \ldots, \beta_p$ *sont des entiers naturels. Notez que l'on a pris soin d'écrire les mêmes nombres premiers dans les deux décompositions, ce qui est loisible tant que l'on autorise la présence de l'exposant nul.*

En faisant le produit, on a donc

$$n\, m = 2^{v_n+v_m}\, 3^{\alpha_3+\beta_3}\, 5^{\alpha_5+\beta_5} \cdots p^{\alpha_p+\beta_p},$$

ce qui montre que $v_{nm} = v_{n+m}$.

La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *vérifie donc (#). Pour vérifier qu'elle n'est pas monotone, il suffit de noter que* $v_1 = 0$, $v_2 = 1$ *et* $v_3 = 0$.