Première composition de mathématiques

Durée : *2 heures.*

Toute sortie est interdite pendant les dix dernières minutes.

Sauf mention explicite du contraire, tout doit toujours être parfaitement justifié. Par exemple, si une question vous demande de « trouver un objet O *vérifiant la propriété* P *», la démonstration de la propriété* P *doit être donnée et parfaitement rigoureuse : la simple description de* O *ne rapportera guère de points...*

Les documents, calculatrices, etc. sont ***interdits****.*

Consignes générales de présentation

La présentation de la copie est prise en compte dans l'évaluation.

- *Ne composez pas sur la première page, ce qui me permettra d'écrire mes commentaires.*
- *Merci* $\boxed{\textit{d'encadrer}}$ *ou de* <u>*souligner*</u> *vos résultats.*
- *Numérotez vos copies doubles, et rendez-les dans l'ordre, la première servant de chemise pour les suivantes, qui ne seront pas imbriquées les unes dans les autres.*
- *Les parties trop difficiles à lire de votre copie ne seront pas lues.*

Conseils pour ce premier devoir

- *Le sujet est long ! Ne vous laissez pas impressionner : l'important est de faire le mieux possible les questions que vous traitez, même si ça n'est qu'une petite partie du sujet. Les questions les plus simples auront un poids considérable dans le barème.*
- *Une* ***très grande*** *part de l'évaluation porte sur la rigueur logique de vos raisonnements. Je serai donc impitoyable avec le respect des règles de logique vues en cours.*
- *Le premier devoir de maths de prépa est un moment un peu impressionnant mais après tout, il s'agit simplement de faire des maths, ce que vous savez bien faire, et la note aura un impact négligeable sur votre vie :* don't panic!

Exercice 1

On définit une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ en posant $u_1 = 2$, $u_2 = 1$, puis $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_{n+2} = \dfrac{u_n\, u_{n+1}}{2u_n - u_{n+1}}$.

1. Donner dans un tableau (sans justification) les valeurs de u_n, pour $n \in [\![1, 5]\!]$.
2. Donner une expression simple de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, et la démontrer par récurrence.

Exercice 2. Couples exclusifs.

Soit $A, B \in \mathscr{P}(\mathbb{N})$ (il s'agit donc de deux ensembles constitués d'entiers naturels).

1. Rappeler la définition de $A \subseteq B$ (sous forme d'une assertion quantifiée) et écrire sa négation.

Dans la suite du problème, on notera $A \not\subseteq B$ la négation de $A \subseteq B$.

On dira que (A, B) est *un couple exclusif* si l'on a

$$\forall X \in \mathscr{P}(\mathbb{N}), A \subseteq X \Leftrightarrow X \not\subseteq B.$$

2. Montrer que $(\{0\}, \mathbb{N}^*)$ est un couple exclusif.

Dans la suite de l'exercice, on suppose que (A, B) est un couple exclusif.

3. Montrer que l'on peut trouver un entier $x \in A$ tel que $x \notin B$.
4. Montrer que $A = \{x\}$ et $B = \mathbb{N} \setminus \{x\}$.

Problème. Quelques remarques sur les suites strictement croissantes.

À l'exception des questions de la première partie qui peuvent servir ensuite, les parties du problème sont indépendantes les unes des autres.

Toutes les suites de l'énoncé sont à valeurs réelles.

Dans ce problème, on considèrera que la (stricte) croissance est définie comme suit :

- une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite *croissante* si $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} \geqslant u_n$;
- une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite *strictement croissante* si $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} > u_n$.

En particulier, on voit (et on pourra utiliser) qu'une suite strictement croissante est croissante.

Partie I. Généralités.

1. Donner un exemple de suite strictement croissante, et un exemple de suite non strictement croissante.

   Cela devrait être clair grâce aux consignes générales, mais je le répète : il faut tout démontrer...
2. (a) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite. Écrire avec des quantificateurs l'assertion « $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante à partir d'un certain rang. »

   (b) Montrer que la suite $\left((-1)^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas strictement croissante à partir d'un certain rang.

   On écrira proprement la négation de l'assertion quantifiée de la question précédente.
3. (a) Montrer que le produit de deux suites strictement croissantes à valeurs strictement positives est encore strictement croissant.

   (b) Montrer que l'on ne peut pas retirer l'hypothèse « à valeurs strictement positives » dans la question précédente.
4. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite.

   (a) On suppose (dans cette question uniquement) $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ strictement croissante. Montrer
   $$\forall n \in \mathbb{N}, \forall k \in \mathbb{N}^*, u_{n+k} > u_n.$$

   (b) En déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante si et seulement si
   $$\forall n, m \in \mathbb{N}, m > n \Rightarrow u_m > u_n.$$

   De même, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante si et seulement si $\forall n, m \in \mathbb{N}, m \geqslant n \Rightarrow u_m \geqslant u_n$. Vous pouvez librement utiliser cette équivalence dans la suite du problème.
5. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite strictement croissante. Montrer que
   $$\forall n, m \in \mathbb{N}, n \leqslant m \Leftrightarrow u_n \leqslant u_m.$$

Partie II. Une équivalence.

6. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes.

   (i) $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ s'annule au plus une fois.

   (ii) Il existe une suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $(u_n v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit strictement croissante.

Partie III. Différences de deux suites strictement croissantes.

7. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite.
   (a) On définit la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par récurrence : $a_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}, a_{n+1} = 1 + a_n + |u_{n+1} - u_n|$. Montrer que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante.
   (b) Construire une suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ strictement croissante telle que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = a_n - b_n$.

On dira qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est *à variation bornée* s'il existe deux suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ strictement croissantes **et majorées** telles que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = a_n - b_n$.

Les deux questions suivantes (indépendantes l'une de l'autre) explorent cette notion.

8. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_{2n-1} = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{2n} = 0$.

   On va montrer par l'absurde que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas à variation bornée. On suppose donc (par l'absurde) qu'il existe deux suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ strictement croissantes et majorées telles que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = a_n - b_n$.

   (a) **Résultat auxiliaire.** Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $2\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right) \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{n}}$.
   (b) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, a_{2n+1} > a_{2n} + \dfrac{1}{\sqrt{n+1}}$.
   (c) En déduire $\forall n \in \mathbb{N}, a_{2n} \geqslant 2\sqrt{n+1} + a_0 - 2$, et conclure.

9. Montrer que le produit de deux suites à variation bornée est encore à variation bornée.

Partie IV. Suites logarithmiques.

On va étudier dans cette partie des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ vérifiant

$$(\#) : \qquad \forall n, m \in \mathbb{N}^*, u_{nm} = u_n + u_m.$$

Le but principal est de montrer qu'une suite strictement croissante $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ vérifiant (#) est de la forme $\left(\lambda \ln(n)\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$, pour un certain $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$.

10. **La raison pour laquelle on exclut** 0. Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite vérifiant $\forall n, m \in \mathbb{N}, v_{nm} = v_n + v_m$. Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est nulle.
11. On admet le résultat suivant, dit de *densité des rationnels* : $\forall x, y \in \mathbb{R}, x < y \Rightarrow]x, y[\cap \mathbb{Q} \neq \varnothing$.
    (a) Soit $a, b \in \mathbb{R}_+^*$. Montrer que, si $\forall k, \ell \in \mathbb{N}^*, \dfrac{k}{\ell} \leqslant a \Rightarrow \dfrac{k}{\ell} \leqslant b$, alors $a \leqslant b$.
    (b) Qu'en déduit-on si $a, b \in \mathbb{R}_+^*$ vérifient $\forall k, \ell \in \mathbb{N}^*, \dfrac{k}{\ell} \leqslant a \Leftrightarrow \dfrac{k}{\ell} \leqslant b$?

Dans la fin de la partie, on considère une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ strictement croissante vérifiant (#).

12. Soit $p \geqslant 2$ un entier. Montrer qu'il existe $c_p \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $\forall k \in \mathbb{N}, u_{p^k} = c_p\, k$.
13. On se donne maintenant deux entiers $p, q \geqslant 2$ et on fixe $c_p, c_q \in \mathbb{R}_+^*$ comme dans la question précédente. Montrer que $\dfrac{c_p}{c_q} = \dfrac{\ln(p)}{\ln(q)}$.
14. Déduire de ce qui précède l'existence de $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ telle que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*} = \left(\lambda \ln(n)\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
15. Donner un exemple de suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ non monotone vérifiant (#).