Deuxième composition de mathématiques [corrigé]

Exercice 1

Dans tout l'exercice, E, F et G sont trois ensembles, et $f : E \to F$ et $g : F \to G$ sont deux applications.

1. **Question de cours.** On suppose f et g surjectives. Montrer que $g \circ f$ est surjective.

   Soit $z \in G$.

   Par surjectivité de g, *on peut trouver* $y \in F$ *tel que* $z = g(y)$.

   Par surjectivité de f, *on peut trouver* $x \in E$ *tel que* $y = f(x)$.

   On en déduit que $z = g\big(f(x)\big) = (g \circ f)(x)$, *ce qui montre la surjectivité de* $g \circ f$.

2. On suppose $g \circ f$ surjective et g injective. Montrer que f est surjective.

   Soit $y \in F$.

   Par surjectivité de $g \circ f$, *on peut trouver* $x \in E$ *tel que* $(g \circ f)(x) = g(y)$.

   Cette égalité se réécrit $g\big(f(x)\big) = g(y)$. *Par injectivité de* g, *on en déduit* $f(x) = y$, *ce qui conclut.*

Exercice 2

Dans tout l'exercice, on fixe $a \in \mathbb{C}$ et on considère $f_a : \begin{cases} \mathbb{C} \to & \mathbb{C} \\ z \mapsto & az + \overline{z} \end{cases}$ et $K_a = \left\{ z \in \mathbb{C} \,\middle|\, f_a(z) = 0 \right\}$.

1. Exprimer (sans démonstration) l'ensemble K_a sous la forme d'une image réciproque.

   On a $K_a = f_a^{-1}[\{0\}]$.

2. (a) Montrer que f_a est injective si et seulement si $K_a = \{0\}$.

   - *Supposons* f_a *injective, et montrons* $K_a = \{0\}$ *par double inclusion.*
     - *Soit* $z \in K_a$. *On a* $f_a(z) = 0 = f_a(0)$.

       Par injectivité de f, *il vient* $z = 0$, *c'est-à-dire* $z \in \{0\}$.
     - *L'inclusion réciproque est automatique : comme* $f_a(0) = 0$, *on a* $0 \in K_a$, *c'est-à-dire* $\{0\} \subseteq K_a$.
   - *Supposons* $K_a = \{0\}$ *et montrons* f_a *injective. Soit* $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ *tels que* $f_a(z_1) = f_a(z_2)$, *c'est-à-dire* $az_1 + \overline{z}_1 = az_2 + \overline{z}_2$. *Notamment grâce aux propriétés de la conjugaison, on peut réécrire cela* $a(z_2 - z_1) + \overline{z_2 - z_1} = 0$, *c'est-à-dire* $z_2 - z_1 \in K_a$.

     Par hypothèse, on en déduit $z_2 - z_1 \in \{0\}$, *c'est-à-dire* $z_2 - z_1 = 0$, *ce qui conclut.*

   (b) En déduire que f_a est injective si et seulement si $|a| \neq 1$.

   - *Montrons l'implication directe par contraposée : supposons* $|a| = 1$.

     Tout nombre complexe ayant des racines carrés, on peut trouver un nombre complexe $z \in \mathbb{C}$ *tel que* $z^2 = -\dfrac{1}{a}$. *En passant au module, on voit que ce nombre est de module* 1. *En multipliant de part et d'autre par*[*] $\dfrac{1}{z} = \overline{z}$, *on en déduit* $z = -\dfrac{\overline{z}}{a}$, *ce qui donne* $az + \overline{z} = 0$, *c'est-à-dire* $f_a(z) = f_a(0)$. *Comme* z *n'est pas nul (car de module* 1*),* f_a *n'est pas injective.*
   - *Montrons l'implication réciproque en utilisant la question précédente. Supposons* $|a| \neq 1$. *On va montrer* $K_a = \{0\}$. *L'inclusion réciproque étant automatique, on se concentre sur l'inclusion directe. Soit* $z \in K_a$.

     On a $az + \overline{z} = 0$. *En conjuguant d'une part, et en multipliant par* $\overline{a}$ *de l'autre, on obtient*

     $$\overline{a}\,\overline{z} + z = 0 \qquad \text{et} \qquad a\overline{a}z + \overline{a}\,\overline{z} = 0.$$

     La différence de ces deux égalités donne $a\overline{a}z - z = 0$, *ce que l'on peut réécrire* $(|a|^2 - 1)z = 0$.

     Comme $|a| \neq 1$, *on a* $|a|^2 \neq 1$, *donc on peut diviser par* $|a|^2 - 1$ *et obtenir* $z = 0$, *ce qui conclut.*

3. Montrer que $f_a[\mathbb{C}] = \mathbb{R}$ si et seulement si $a = 1$.

- *Supposons* $f_a[\mathbb{C}] = \mathbb{R}$.
  - *Comme* $f_a(1) = a + 1$, *on a* $a + 1 \in \mathbb{R}$, *d'où* $a \in \mathbb{R}$.
  - *Comme* $f_a(i) = ai - i = (a-1)i$, *on a* $(a-1)i \in \mathbb{R}$, *ce qui entraîne* $a = 1$, *par exemple parce que* $\mathrm{Im}\,[(a-1)i] = a - 1$.
- *Supposons* $a = 1$, *si bien que* $f_a : z \mapsto z + \overline{z} = 2\,\mathrm{Ré}(z)$. *Montrons* $f_a[\mathbb{C}] = \mathbb{R}$ *par double inclusion.*
  - *Soit* $w \in f_a[\mathbb{C}]$. *On peut donc trouver* $z \in \mathbb{C}$ *tel que* $w = f_a(z) = 2\,\mathrm{Ré}(z)$. *Cela montre* $w \in \mathbb{R}$.
  - *Réciproquement, soit* $w \in \mathbb{R}$. *On a* $w = 2\,\mathrm{Ré}(w/2) = f_a(w/2)$. *Comme* $w/2 \in \mathbb{C}$, *on a bien montré* $w \in f_a[\mathbb{C}]$.

---

*. Il y a des dizaines de façons de rédiger cette implication : j'ai fait ici en sorte de pouvoir utiliser une fois de plus ma remarque fétiche $\forall z \in \mathbb{U}, z^{-1} = \overline{z}$.

Exercice 3

Soit E et F deux ensembles et $f : E \to F$ une application.

1. Montrer que l'assertion

$$\forall A, B \in \mathscr{P}(E), f[A] \subseteq f[B] \Rightarrow A \subseteq B$$

est équivalente à l'injectivité de f.

- *Supposons* $\forall A, B \in \mathscr{P}(E), f[A] \subseteq f[B] \Rightarrow A \subseteq B$ *(∗) et montrons* f *injective.*

  Soit $x_1, x_2 \in E$ *tels que* $f(x_1) = f(x_2)$. *On en déduit* $f[\{x_1\}] = \{f(x_1)\} = \{f(x_2)\} = f[\{x_2\}]$, *ce qui montre* a fortiori $f[\{x_1\}] \subseteq f[\{x_2\}]$.

  En appliquant (∗) à $A = \{x_1\}$ *et* $B = \{x_2\}$, *on obtient* $\{x_1\} \subseteq \{x_2\}$.

  Ainsi, $x_1 \in \{x_2\}$, *ce qui donne* $x_1 = x_2$, *et conclut.*
- *Réciproquement, supposons* f *injective. Soit* $A, B \in \mathscr{P}(E)$ *tels que* $f[A] \subseteq f[B]$. *Montrons* $A \subseteq B$.

  Soit $a \in A$. *On a* $f(a) \in f[A]$ *donc, par hypothèse,* $f(a) \in f[B]$.

  On peut donc trouver $b \in B$ *tel que* $f(a) = f(b)$.

  Par injectivité de f, *cela montre* $a = b$, *donc* $a \in B$, *ce qui conclut.*

2. À quoi équivaut l'assertion

$$\forall C, D \in \mathscr{P}(F), f^{-1}[C] \subseteq f^{-1}[D] \Rightarrow C \subseteq D\,?$$

On va montrer que cette assertion équivaut à la surjectivité de f.

- *Supposons* $\forall C, D \in \mathscr{P}(F), f^{-1}[C] \subseteq f^{-1}[D] \Rightarrow C \subseteq D$ *(†).*

  Montrons que $f^{-1}[F] \subseteq f^{-1}\big[f[E]\big]$.

  Soit $x \in f^{-1}[F]$. *Comme* $x \in E$, *on a bien* $f(x) \in f[E]$, *ce qui signifie exactement* $x \in f^{-1}\big[f[E]\big]$.

  (À vrai dire, on vérifierait facilement que $f^{-1}[F] = f^{-1}\big[f[E]\big] = E$.*)*

  En appliquant (†) à $C = F$ *et* $D = f[E]$, *on obtient donc* $F \subseteq f[E]$, *ce qui est une reformulation de la sujectivité de* f.
- *Réciproquement, supposons* f *surjective et montrons* $\forall C, D \in \mathscr{P}(F), f^{-1}[C] \subseteq f^{-1}[D] \Rightarrow C \subseteq D$.

  Soit $C, D \in \mathscr{P}(F)$ *tel que* $f^{-1}[C] \subseteq f^{-1}[D]$. *Montrons* $C \subseteq D$.

  Soit $c \in C$. *Comme* f *est surjective, on peut trouver* $x \in E$ *tel que* $f(x) = c$.

  Cet élément vérifie donc $x \in f^{-1}[C]$. *Par hypothèse, on en déduit* $x \in f^{-1}[D]$, *c'est-à-dire* $f(x) \in D$. *On a donc montré* $c \in D$, *ce qui conclut.*

Problème. Quelques théorèmes sur les polygones réguliers.

Soit $n \geqslant 2$. Dans tout le problème, on utilise les notations suivantes.

- Comme d'habitude, on notera ζ_n le nombre complexe $\exp\left(i\dfrac{2\pi}{n}\right)$. Si n est clair dans le contexte, on pourra simplement le noter ζ.
- Pour $g, h \in \mathbb{C}$, on notera $\Pi_n(g,h)$ le n-uplet de nombres complexes

$$\Pi_n(g,h) = \left(g+h, g+\zeta_n h, g+\zeta_n^2 h, \ldots, g+\zeta_n^{n-1} h\right).$$

  Informellement, si $n \geqslant 3$, il s'agit du n-uplet formé des sommets d'un n-gone régulier, parcouru dans le sens direct. Cependant, on reviendra systématiquement à la définition ou aux questions précédentes, et on ne cherchera pas à utiliser de résultats « évidents » sur les n-gones réguliers.
- Étant donné un n-uplet $p = (z_0, z_1, \ldots, z_{n-1}) \in \mathbb{C}^n$ et un entier $k \in [\![0, n-1]\!]$, on notera $p[k] = z_k$. Par exemple, si $n = 3$ et $p = (a, b, c)$, on a $p[0] = a$, $p[1] = b$ et $p[2] = c$. On notera que cela signifie que les n éléments d'un n-uplet sont numérotés de 0 à $n-1$, comme chez les informaticiens. Cette convention a été choisie pour avoir la formule $\forall g, h \in \mathbb{C}, \forall k \in [\![0, n-1]\!], \Pi_n(g,h)[k] = g + \zeta_n^k h$, que l'on pourra utiliser librement.
- Enfin, on notera Pol_n l'ensemble des n-uplets de la forme $\Pi_n(g,h)$, c'est-à-dire

$$\mathrm{Pol}_n = \left\{\Pi_n(g,h) \,\middle|\, g, h \in \mathbb{C}\right\}.$$

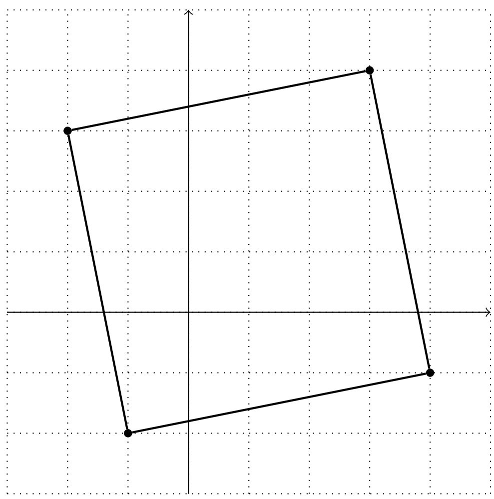
Partie I. Généralités.

1. Déterminer exactement $\Pi_4(1+i, 2+3i)$.

   On donnera les éléments de ce quadruplet sous forme algébrique, puis on les dessinera.

   Notons $p = \Pi_4(1+i, 2+3i)$. *Les quatre éléments de ce quadruplet sont :*

$$\begin{aligned}
p[0] &= (1+i) + (2+3i) = 3+4i \\
p[1] &= (1+i) + (2+3i)i = (1+i) + (-3+2i) = -2+3i \\
p[2] &= (1+i) - (2+3i) = -1-2i \\
p[3] &= (1+i) - (2+3i)i = (1+i) - (-3+2i) = 4-i.
\end{aligned}$$



2. Soit $n \geqslant 3$, $g, h \in \mathbb{C}$.

   Calculer $\displaystyle\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \Pi_n(g,h)[k]$ et donner l'interprétation géométrique de ce calcul.

   On a

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n-1} \Pi_n(g,h)[k] &= \sum_{k=0}^{n-1}\left(g+\zeta_n^k h\right) \\ &= ng + h\sum_{k=0}^{n-1}\zeta_n^k \\ &= ng + h\frac{1-\zeta_n^n}{1-\zeta_n} && \textit{(car } \zeta_n \neq 1\textit{)} \\ &= ng,\end{aligned}$$

$$\textit{donc} \qquad \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \Pi_n(g,h)[k] = g.$$

   (Notons d'ailleurs que ce calcul est également valable si $n = 2$, mais pas si $n = 1$).

   *L'interprétation géométrique est que le centre de gravité (ou, en termes plus géométriques, l'*isobarycentre*) des sommets du polygone $\Pi_n(g,h)$ est g.*

3. Soit $n \geqslant 3$, $g \in \mathbb{C}$ et $h \in \mathbb{C}^*$. On pose $a = \Pi_n(g,h)[0]$, $b = \Pi_n(g,h)[1]$ et $c = \Pi_n(g,h)[2]$.

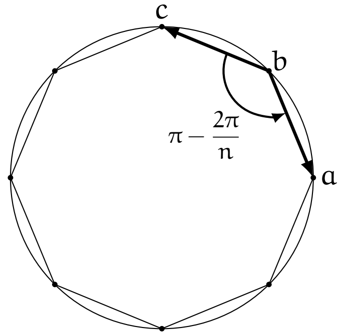
   Calculer la forme exponentielle du quotient $\dfrac{a-b}{c-b}$ et interpréter géométriquement le résultat.

   Remarquons déjà que $c - b = (g+\zeta_n^2 h) - (g+\zeta_n h) = \zeta_n(\zeta_n - 1)h \neq 0$, donc que le quotient est bien défini.

   On a ensuite

$$\begin{aligned}\frac{a-b}{c-b} &= \frac{(g+h)-(g+\zeta_n h)}{(g+\zeta_n^2 h)-(g+\zeta_n h)} \\ &= \frac{h-\zeta_n h}{\zeta_n^2 h - \zeta_n h} \\ &= \frac{1-\zeta_n}{\zeta_n(\zeta_n-1)} && \textit{(NB : } h \neq 0\textit{)} \\ &= -\frac{1}{\zeta_n} = -\overline{\zeta_n}.\end{aligned}$$

   La forme exponentielle du quotient est donc $1 \times e^{i\left(\pi - \frac{2\pi}{n}\right)}$.



On en déduit que les vecteurs $\overrightarrow{ba}$ et $\overrightarrow{bc}$ ont la même norme, et que l'angle orienté $(\overrightarrow{bc}, \overrightarrow{ba})$ mesure $\pi - \dfrac{2\pi}{n}$ (qui vaut $\pi/3$ si $n = 3$ et $\pi/2$ si $n = 4$, ce qui est rassurant).

4. Soit $n \geqslant 3$. Montrer que Pol_n est stable par combinaison linéaire, c'est-à-dire que

$$\forall p_1, p_2 \in \mathrm{Pol}_n, \forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}, \lambda_1 p_1 + \lambda_2 p_2 \in \mathrm{Pol}_n\,.$$

C'est de la rédaction automatique !

Soit $p_1, p_2 \in \mathrm{Pol}_n$. On peut donc trouver $g_1, g_2, h_1, h_2 \in \mathbb{C}$ tels que

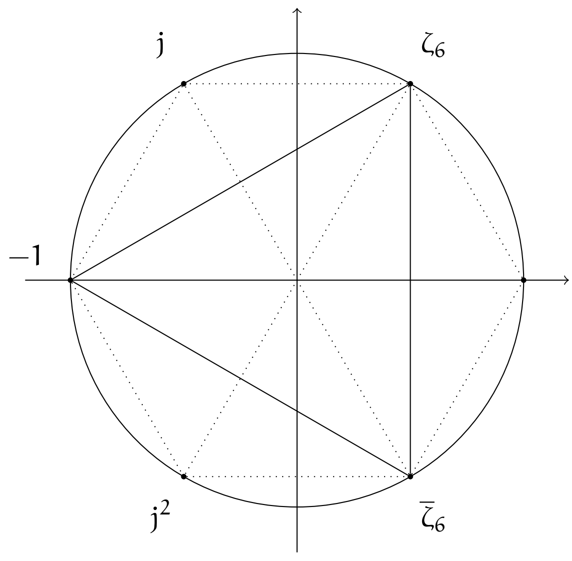
$$\begin{aligned} & p_1 = \Pi_n(g_1, h_1) = \big(g_1 + h_1, g_1 + \zeta_n h_1, \ldots, g_1 + \zeta_n^{n-1} h_1\big) \\ \textit{et} \qquad & p_2 = \Pi_n(g_2, h_2) = \big(g_2 + h_2, g_2 + \zeta_n h_2, \ldots, g_2 + \zeta_n^{n-1} h_2\big). \end{aligned}$$

Soit $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$. On a alors

$$\begin{aligned} \lambda_1 p_1 + \lambda_2 p_2 &= \big((\lambda_1 g_1 + \lambda_2 g_2) + (\lambda_1 h_1 + \lambda_2 h_2), \ldots, (\lambda_1 g_1 + \lambda_2 g_2) + \zeta_n^{n-1}(\lambda_1 h_1 + \lambda_2 h_2)\big) \\ &= \Pi_n(\lambda_1 g_1 + \lambda_2 g_2, \lambda_1 h_1 + \lambda_2 h_2), \end{aligned}$$

ce qui montre $\lambda_1 p_1 + \lambda_2 p_2 \in \mathrm{Pol}_n$, et conclut la démonstration.

5. Montrer $\big(\zeta_6, -1, \overline{\zeta_6}\big) \in \mathrm{Pol}_3$ et $\big(\zeta_6, \overline{\zeta_6}, -1\big) \notin \mathrm{Pol}_3$.



- *On voit que le triplet $\big(\zeta_6, -1, \overline{\zeta_6}\big)$ est déjà « centré en 0 », ce qui pousse à écrire*

$$\begin{aligned} \big(\zeta_6, -1, \overline{\zeta_6}\big) &= \zeta_6\big(1, -\overline{\zeta}_6, \overline{\zeta_6}^{\,2}\big) \\ &= \zeta_6(1, j, j^2) = \Pi_6(0, \zeta_6), \end{aligned}$$

  ce qui montre $\big(\zeta_6, -1, \overline{\zeta_6}\big) \in \mathrm{Pol}_3$.

- *Supposons par l'absurde pouvoir trouver $g, h \in \mathbb{C}$ tel que*

$$\big(\zeta_6, \overline{\zeta_6}, -1\big) = \Pi_3(g, h) = \big(g + h, g + jh, g + j^2 h\big).$$

  Déjà, comme $\zeta_6 \neq \overline{\zeta_6}$, cela entraîne $h \neq 0$. On en déduirait donc

$$j = \frac{(g + j^2 h) - (g + jh)}{(g + jh) - (g + h)} = \frac{-1 - \overline{\zeta}_6}{\overline{\zeta}_6 - \zeta_6}.$$

Or, ce quotient vaut en fait

$$\frac{-1-\overline{\zeta_6}}{\overline{\zeta_6}-\zeta_6} = \frac{\zeta_6^3-\zeta_6^5}{\zeta_6^5-\zeta_6^7} = \frac{1}{\zeta_6^2} = \frac{1}{j} = j^2 \neq j.$$

Ainsi, $\left(\zeta_6, \overline{\zeta_6}, -1\right) \notin \mathrm{Pol}_3$.

6. Soit $n \geqslant 3$. Montrer que l'application

$$\varphi : \begin{cases} \mathrm{Pol}_n & \to \quad \mathbb{C}^2 \\ \quad p & \mapsto (p[0], p[1]) \end{cases}$$

est bijective.

Soit $(a, b) \in \mathbb{C}^2$.

On va montrer, par analyse et synthèse, que (a, b) *possède un unique antécédent par* φ.

Analyse. *Soit* $p \in \mathrm{Pol}_n$ *tel que* $\varphi(p) = (a, b)$. *On peut trouver* $g, h \in \mathbb{C}$ *tels que* $p = \Pi_n(g, h)$, *si bien que* $a = g + h$ *et* $b = g + \zeta_n h$.

On en déduit par soustraction $b - a = (\zeta_n - 1)h$. *Comme* $\zeta_n \neq 1$, *cela entraîne les égalités* $h = \dfrac{1}{\zeta_n - 1}(b-a) = \dfrac{1}{\zeta_n - 1}b - \dfrac{1}{\zeta_n - 1}a$.

De $a = g + h$, *on tire alors* $g = a - h = \dfrac{\zeta_n}{\zeta_n - 1}a - \dfrac{1}{\zeta_n - 1}b$.

Synthèse. *Posons*

$$g = \frac{\zeta_n}{\zeta_n - 1}a - \frac{1}{\zeta_n - 1}b \qquad \textit{et} \qquad h = \frac{1}{\zeta_n - 1}b - \frac{1}{\zeta_n - 1}a,$$

puis $p = \Pi_n(g, h)$. *On a*

$$\begin{aligned} p[0] = g + h &= \left(\frac{\zeta_n}{\zeta_n - 1} - \frac{1}{\zeta_n - 1}\right)a + \left(\frac{1}{\zeta_n - 1} - \frac{1}{\zeta_n - 1}\right)b = a, \\ \textit{et} \qquad p[1] = g + \zeta_n h &= \left(\frac{\zeta_n}{\zeta_n - 1} - \zeta_n\frac{1}{\zeta_n - 1}\right)a + \left(\zeta_n\frac{1}{\zeta_n - 1} - \frac{1}{\zeta_n - 1}\right)b = b, \end{aligned}$$

ce qui montre que $\varphi(p) = (a, b)$, *et conclut la démonstration.*

7. Soit $n \geqslant 3$.

   (a) Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $\forall k \in [\![0, n-1]\!], \mathrm{Ré}\left(\zeta_n^k z\right) = 0$. Montrer que $z = 0$.

   En appliquant l'hypothèse à $k = 0$, *on obtient* $\mathrm{Ré}(z) = 0$, *si bien qu'on peut trouver* $t \in \mathbb{R}$ *tel que l'on ait* $z = it$.

   En l'appliquant à $k = 1$, *on obtient alors* $\mathrm{Ré}(\zeta_n\, it) = 0$, *c'est-à-dire* $0 = -\mathrm{Im}(\zeta_n t) = -\sin\left(\dfrac{2\pi}{n}\right)t$.

   Comme $n \geqslant 3$, *on a* $\dfrac{2\pi}{n} \in \left]0, \pi\right[$, *donc* $\sin\left(\dfrac{2\pi}{n}\right) \neq 0$.

   Il s'ensuit $t = 0$, *et* $z = 0$.

   (b) Soit $g \in \mathbb{C}$ et $h \in \mathbb{C}^*$ tel que tous les éléments de $\Pi_n(g, h)$ soient de module 1.

   Montrer que $g = 0$.

   Pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, *on a*

   $|\Pi_n(g,h)[k]|^2 = \overline{\left(g + \zeta_n^k h\right)}\left(g + \zeta_n^k h\right) = |g|^2 + |\zeta_n^k|^2 + \overline{\zeta_n^k h}g + \zeta_n^k h\overline{g} = |g|^2 + |h|^2 + 2\,\mathrm{Ré}\left(\overline{g}\,h\,\zeta_n^k\right).$

Cela montre que toutes les quantités $x_k = \text{Ré}\left(\overline{g}\, h\, \zeta_n^k\right)$ *sont égales, pour* $k \in [\![0, n-1]\!]$.

Par ailleurs, leur somme vaut (notamment grâce à la $\mathbb{R}$*-linéarité de* Ré*) :*

$$\sum_{k=0}^{n-1} x_k = \text{Ré}\left(\overline{g}\, h\, \zeta_n^k\right) = \text{Ré}\left(\overline{g}h \sum_{k=0}^{n-1} \zeta_n^k\right) = 0,$$

par le même calcul qu'à la question 2.

On en déduit $\forall k \in [\![0, n-1]\!], x_k = 0$*, c'est-à-dire* $\forall k \in [\![0, n-1]\!], \text{Ré}\left(\overline{g}h\zeta_n^k\right) = 0$.

D'après la question précédente, cela entraîne $\overline{g}h = 0$*, c'est-à-dire* $g = 0$ *ou* $h = 0$ *d'après la règle du produit nul.*

Comme h *est explicitement supposé non nul, il vient* $g = 0$.

Partie II. *Fair and square* : le théorème de Finsler-Hadwiger (1938).

> *Wenn zwei Quadrate eine Ecke geimeinsam haben, so bilden ihre Mittelpunkte die Gegenecken eines Quadrats, dessen andere Gegenecken in die Mitte zwischen entsprechende Ecken sind dabei der gemeinsamen Ecke benachbart, aber mit entgegengesetztem Umlaufsinn.*
>
> Paul Finsler, Hugo Hadwiger, *Einige Relationen im Dreieck*.

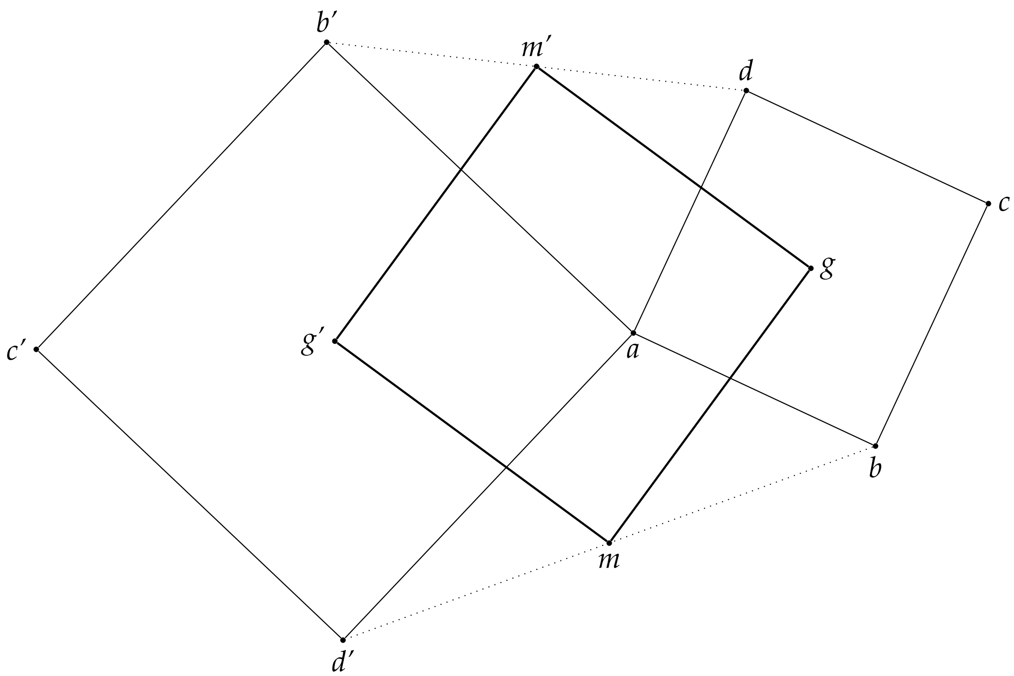
Soit $a, b, b' \in \mathbb{C}$.

D'après la question 6, on peut trouver (c, d) et $(c', d') \in \mathbb{C}^2$ tels que $(a, b, c, d), (a, b', c', d') \in \text{Pol}_4$.

On pose $g = \dfrac{a+b+c+d}{4}$ et $g' = \dfrac{a+b'+c'+d'}{4}$, ainsi que $m = \dfrac{b+d'}{2}$ et $m' = \dfrac{b'+d}{2}$.

Le but de cette partie est de montrer que $(g, m', g', m) \in \text{Pol}_4$.

8. Dessiner proprement la situation décrite, en plaçant les onze points que nous avons définis.



9. (a) En utilisant le fait que $(a, b, c, d) \in \mathrm{Pol}_4$, exprimer c, d et g en fonction de a et b.

On peut trouver $\widehat{g}, h \in \mathbb{C}$ *tels que* $(a, b, c, d) = \Pi_4(\widehat{g}, h)$. *Explicitement, on a les relations*

$$a = \widehat{g} + h, \qquad b = \widehat{g} + ih, \qquad c = \widehat{g} - h \qquad \text{et} \qquad d = \widehat{g} - ih.$$

En faisant la moyenne de ces quatre relations, on obtient $g = \dfrac{a+b+c+d}{4} = \widehat{g}$, *ce qui est d'ailleurs le contenu de la question 2.*

Des relations ci-dessus, on déduit $b - a = (i-1)h$, *c'est-à-dire* $h = \dfrac{1}{i-1}(b-a) = -\dfrac{1+i}{2}(b-a)$.

La relation $g + h = a$ *donne alors* $g = a - h = a + \dfrac{1+i}{2}(b-a) = \dfrac{1-i}{2}a + \dfrac{1+i}{2}b$.

On en déduit

$$\begin{aligned} c &= g - h = -ia + (1+i)b \\ d &= g - ih = (1-i)a + ib \\ g &= \frac{1-i}{2}a + \frac{1+i}{2}b. \end{aligned}$$

(b) En déduire une expression de m et m' en fonction de a, b et b'.

Appliqués à $(a, b', c', d') \in \mathrm{Pol}_4$, *les calculs de la question précédente donnent notamment l'égalité* $d' = (1-i)a + ib'$. *On en déduit*

$$\begin{aligned} m &= \frac{b+d'}{2} = \frac{1-i}{2}a + \frac{1}{2}b + \frac{i}{2}b' \\ m' &= \frac{b'+d}{2} = \frac{1-i}{2}a + \frac{i}{2}b + \frac{1}{2}b'. \end{aligned}$$

10. Soit $p = (z_0, z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{C}^4$.

Montrer que $p \in \mathrm{Pol}_4$ si et seulement si $z_0 - z_1 + z_2 - z_3 = z_0 + iz_1 - z_2 - iz_3 = 0$.

On procède par double implication.

- *Supposons* $p \in \mathrm{Pol}_4$.

  On peut donc trouver $g, h \in \mathbb{C}$ *tel que* $p = \Pi_4(g, h) = (g+h, g+ih, g-h, g-ih)$. *Il vient alors*

$$\begin{aligned} z_0 - z_1 + z_2 - z_3 &= (g+h) - (g+ih) + (g-h) - (g-ih) \\ &= (1-1+1-1)g + (1-i-1+i)h = 0 \\ z_0 + iz_1 - z_2 - iz_3 &= (g+h) + i(g+ih) - (g-h) - i(g-ih) \\ &= (1+i-1-i)g + (1-1+1-1)h = 0. \end{aligned}$$

- *Réciproquement (c'est le sens difficile), supposons* $z_0 - z_1 + z_2 - z_3 = z_0 + iz_1 - z_2 - iz_3 = 0$.

  On va utiliser ces relations pour exprimer z_2 *et* z_3 *en fonction de* z_0 *et* z_1.

  La somme des deux relations donne $2z_0 + (i-1)z_1 - (1+i)z_3 = 0$, *d'où*

$$z_3 = \underbrace{\frac{1}{1+i}}_{=\frac{1-i}{2}} \big(2z_0 + (i-1)z_1\big) = (1-i)z_0 + iz_1$$

et l'on en déduit alors

$$z_2 = z_3 - z_0 + z_1 = -iz_0 + (1+i)z_1.$$

Ainsi,

$$p = (z_0, z_1, -iz_0 + (1+i)z_1, (1-i)z_0 + iz_1) = z_0(1, 0, -i, 1-i) + z_1(0, 1, 1+i, i).$$

Or, on voit $(1, 0, -i, 1-i) = \Pi_4\left(\frac{1-i}{2}, \frac{1+i}{2}\right)$ *et* $(0, 1, 1+i, i) = \Pi_4\left(\frac{1+i}{2}, \frac{1-i}{2}\right)$ *(surtout si l'on pense à faire un dessin...) si bien que ces deux quadruplets appartiennent à* Pol_4*.*

D'après la question 4, il en va de même de p*, ce qui conclut.*

11. Conclure.

Il ne reste plus qu'à appliquer la question précédente au quadruplet (g, m, g', m')*, à l'aide des expressions obtenues plus haut. On a :*

$$\begin{aligned} g - m + g' - m' &= \left(\frac{1-i}{2} - \frac{1-i}{2} + \frac{1-i}{2} - \frac{1-i}{2}\right) a + \left(\frac{1+i}{2} - \frac{1}{2} - \frac{i}{2}\right) b \\ &\qquad + \left(-\frac{i}{2} + \frac{1+i}{2} - \frac{1}{2}\right) b' = 0 \\ \textit{et} \quad g + im - g' - im' &= \left(\frac{1-i}{2} + i\frac{1-i}{2} - \frac{1-i}{2} - i\frac{1-i}{2}\right) a + \left(\frac{1+i}{2} - i\frac{1}{2} - (-i)\frac{i}{2}\right) b \\ &\qquad + \left(-i\frac{i}{2} - \frac{1+i}{2} - (-i)\frac{1}{2}\right) b' = 0, \end{aligned}$$

et l'on en déduit $(g, m, g', m') \in \mathrm{Pol}_4$*.*

Partie III. Une observation de Kepler sur l'heptagone régulier (1619).

> *Magna res agitur, per hunc enim effectum stetit, quo minus Heptagonus & caeteræ hujus generis figuræ, à Deo fuerint adhibitæ ad ornatum Mundi, ut sunt quidem adhibitæ scibiles figuræ in superioribus explicatæ.*
>
> Johannes Kepler, *Harmonice Mundi*, XLV.

Cette partie se concentre sur le plus simple des heptagones réguliers : $\Pi_7(0, 1) = (1, \zeta_7, \zeta_7^2, \ldots, \zeta_7^6)$.

Pour tout $k \in \{1, 2, 3\}$, on note $s_k = |\zeta_7^k - 1|^2$.

12. Exprimer s_1, s_2 et s_3 à l'aide de la fonction sinus.

Soit $k \in \{1, 2, 3\}$*. On a*

$$\begin{aligned} |\zeta_7^k - 1|^2 &= \left|\exp\left(i\frac{2\pi}{7}k\right) - 1\right|^2 \\ &= \left|\exp\left(i\frac{\pi}{7}k\right)\left(\exp\left(i\frac{\pi}{7}k\right) - \exp\left(-i\frac{\pi}{7}k\right)\right)\right|^2 \\ &= \underbrace{\left|\exp\left(i\frac{\pi}{7}k\right)\right|^2}_{=1} \times \left|2i\sin\left(\frac{\pi}{7}k\right)\right|^2 \\ &= 4\sin^2\left(\frac{\pi}{7}k\right). \end{aligned}$$

13. Montrer $\left\{|\omega_1-\omega_2|^2 \,\middle|\, \omega_1,\omega_2\in\mathbb{U}_7\right\}=\{0,s_1,s_2,s_3\}$.

Notons $\Omega=\left\{|\omega_1-\omega_2|^2 \,\middle|\, \omega_1,\omega_2\in\mathbb{U}_7\right\}$ *et montrons* $\Omega=\{0,s_1,s_2,s_3\}$ *par double inclusion.*

- *Soit* $z\in\Omega$*. On peut donc trouver* $k,\ell\in\mathbb{Z}$ *tels que* $\omega=|\zeta_7^k-\zeta_7^\ell|^2$.

  On peut alors écrire $z=\left|\zeta_7^\ell\left(\zeta_7^{k-\ell}-1\right)\right|^2=\left|\zeta_7^{k-\ell}-1\right|^2$*. On peut alors trouver* $j\in[\![0,6]\!]$ *tel que* $k-\ell\equiv j \pmod 7$*, si bien que* $z=\left|\zeta_7^j-1\right|^2$*. On distingue alors trois cas :*
  - *Si* $j=0$*, on a* $z=0$.
  - *Si* $j\in\{1,2,3\}$*, on a* $z=s_j$.
  - *Si* $j\in\{4,5,6\}$*, on passe au conjugué (ce qui ne change pas le module) pour obtenir la nouvelle écriture* $z=\left|\overline{\zeta_7^j-1}\right|^2=\left|\zeta_7^{-j}-1\right|^2=\left|\zeta_7^{7-j}-1\right|^2$*. Comme* $7-j\in\{1,2,3\}$*, on a bien* $z=s_{7-j}$.

  Dans tous les cas, on a bien $z\in\{0,s_1,s_2,s_3\}$.
- *Réciproquement, soit* $z\in\{0,s_1,s_2,s_3\}$.
  - *Si* $z=0$*, on a* $z=|1-1|^2$*, donc* $z\in\Omega$ *car* $1\in\mathbb{U}_7$.
  - *Sinon, on peut trouver* $k\in\{1,2,3\}$ *tel que* $z=s_k=|\zeta_7^k-1|^2$*. Comme* ζ_7^k *et* 1 *appartiennent à* $\mathbb{U}_7$*, cela montre aussi* $z\in\Omega$.

Le but des dernières questions est de trouver une équation de degré 3 à coefficients entiers dont les solutions sont exactement s_1, s_2 et s_3.

14. Exprimer s_1, s_2 et s_3 en fonction des puissances de ζ_7.

Soit $\omega\in\mathbb{U}_7$*. On a*

$$\begin{aligned}|\omega-1|^2&=\overline{(\omega-1)}(\omega-1)\\&=(\overline{\omega}-1)(\omega-1)\\&=1-\overline{\omega}-\omega+1\\&=2-\omega-\overline{\omega}.\end{aligned}$$

En appliquant cette formule pour $\omega\in\{\zeta_7,\zeta_7^2,\zeta_7^3\}$*, on obtient*

$$\begin{aligned}s_1&=2-\zeta_7-\zeta_7^6\\s_2&=2-\zeta_7^2-\zeta_7^5\\s_3&=2-\zeta_7^3-\zeta_7^4.\end{aligned}$$

15. À l'aide de la question précédente, calculer successivement les nombres réels suivants :

- la somme $\alpha=s_1+s_2+s_3$;

  On a $\displaystyle\sum_{k=1}^{6}\zeta_7^k=\sum_{k=0}^{6}\zeta_7^k-1=\sum_{\omega\in\mathbb{U}_7}\omega-1=-1$*. Grâce aux expressions précédentes, on en déduit*

$$\alpha=s_1+s_2+s_3=6-\sum_{k=1}^{6}\zeta_7^k=7.$$

- la somme $\beta = s_1 s_2 + s_1 s_3 + s_2 s_3$;

  On procède comme à la question précédente : soit $\omega \in \mathbb{U}_7$. On a

$$\begin{aligned}\underbrace{(2-\omega-\overline{\omega})}_{|\omega-1|^2}\underbrace{(2-\omega^2-\overline{\omega}^2)}_{|\omega^2-1|^2} &= 4-2(\omega+\omega^2+\overline{\omega}^2+\overline{\omega})+(\omega+\omega^3+\overline{\omega}^3+\overline{\omega})\\ &= 4-\omega-2\omega^2+\omega^3+\omega^4-2\omega^5-\omega^6.\end{aligned}$$

  En appliquant cette formule pour $\omega \in \{\zeta_7, \zeta_7^2, \zeta_7^3\}$, on obtient (en utilisant par exemple, par passage au conjugué, l'égalité $|\zeta_7^4 - 1|^2 = |\zeta_7^3 - 1|^2 = s_3$) :

$$\begin{aligned} s_1 s_2 &= 4-\zeta_7-2\zeta_7^2+\zeta_7^3+\zeta_7^4-2\zeta_7^5-\zeta_7^6\\ s_2 s_3 &= 4+\zeta_7-\zeta_7^2-2\zeta_7^3-2\zeta_7^4-\zeta_7^5+\zeta_7^6\\ s_3 s_1 &= 4-2\zeta_7+\zeta_7^2-\zeta_7^3-\zeta_7^4+\zeta_7^5-2\zeta_7^6,\end{aligned}$$

  donc $\beta = s_1 s_2 + s_2 s_3 + s_1 s_3 = 12 - 2\displaystyle\sum_{k=1}^{6} \zeta_7^k = 14.$

- le produit $\gamma = s_1 s_2 s_3$.

  En repartant de l'expression obtenue pour $s_1 s_2$, on a

$$\begin{aligned} s_1 s_2 s_3 &= \left(4-\zeta_7-2\zeta_7^2+\zeta_7^3+\zeta_7^4-2\zeta_7^5-\zeta_7^6\right)\left(2-\zeta_7^3-\zeta_7^4\right)\\ &= 8-2\zeta_7-4\zeta_7^2+2\zeta_7^3+2\zeta_7^4-4\zeta_7^5-2\zeta_7^6\\ &\quad -1+2\zeta_7+\zeta_7^2-4\zeta_7^3+\zeta_7^4+2\zeta_7^5-\zeta_7^6\\ &\quad -1-\zeta_7+2\zeta_7^2+\zeta_7^3-4\zeta_7^4+\zeta_7^5+2\zeta_7^6\\ &= 6-\sum_{k=1}^{6}\zeta_7^k = 7.\end{aligned}$$

16. Soit $x \in \mathbb{C}$. Développer $(x - s_1)(x - s_2)(x - s_3)$ et conclure.

  On a

$$\begin{aligned}(x-s_1)(x-s_2)(x-s_3) &= (x^2-(s_1+s_2)x+s_1s_2)(x-s_3)\\ &= \left[x^3-(s_1+s_2)x^2+s_1s_2x\right]+\left[-s_3x^2+(s_1+s_2)s_3x-s_1s_2s_3\right]\\ &= x^3-(s_1+s_2+s_3)x^2+\underbrace{[s_1s_2+(s_1+s_2)s_3]}_{=s_1s_2+s_1s_3+s_2s_3}x-s_1s_2s_3\\ &= x^3-\alpha x^2+\beta x+\gamma\\ &= x^3-7x^2+14x-7.\end{aligned}$$

  La factorisation montre que

$$\begin{aligned} x^3-7x^2+14x-7=0 &\Leftrightarrow (x-s_1)(x-s_2)(x-s_3)=0\\ &\Leftrightarrow x-s_1=0 \text{ ou } x-s_2=0 \text{ ou } x-s_3=0\\ &\Leftrightarrow x\in\{s_1,s_2,s_3\}.\end{aligned}$$

  Les nombres s_1, s_2 et s_3 dont donc les solutions de l'équation $x^3 - 7x^2 + 14x - 7 = 0$.

Partie IV. Une conjecture d'Erdős (1952).

Azt sejtettem, hogy ha a (6) alatti rendszer lefedő, akkor $\sum_{i=1}^{k} \frac{1}{n_i} > 1$, *vagyis a rendszer nem egyszeresen fedi le az egész számokat.*

Erdős Pál, *Egy kongruenciarendszerekről szóló problémáról*.

Soit $N \geqslant 3$.

On va considérer dans cette partie des polygones réguliers contenus dans $\mathbb{U}_N$, et donc dans $\mathbb{U}$. À la lumière de la question 7, il est naturel de se limiter aux polygones centrés en 0.

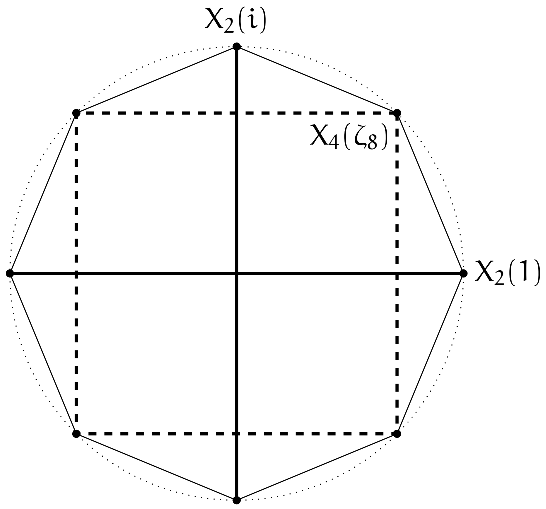
On abandonne les n-uplets et on considère désormais des parties de $\mathbb{U}$ qui forment un polygone régulier. Plus précisément, pour $n \geqslant 2$ et $h \in \mathbb{U}$, on notera

$$X_n(h) = \left\{h, \zeta_n h, \zeta_n^2 h, \ldots, \zeta_n^{n-1} h\right\}.$$

On va considérer les façons de **partitionner** $\mathbb{U}_N$ en polygones réguliers. Plus précisément, on se donne un entier $r \geqslant 2$, des entiers $2 \leqslant n_1 \leqslant n_2 \leqslant \cdots \leqslant n_r < N$ et des éléments $h_1, \ldots, h_r \in \mathbb{U}$ tels que la famille $\left(X_{n_1}(h_1), X_{n_2}(h_2), \ldots, X_{n_r}(h_r)\right)$ soit une partition de $\mathbb{U}_N$.

17. Donner un exemple avec $N = 8$ et $r = 3$. (Un dessin clair suffira).

Le dessin ci-dessous illustre que $\left(X_2(1), X_2(i), X_4(\zeta_8)\right)$ *est une partition de* $\mathbb{U}_8$.



18. Calculer $\displaystyle\sum_{\omega \in \mathbb{U}_N} \omega^{n_1}$ et, pour tout $j \in [\![1, r]\!]$, $\displaystyle\sum_{\omega \in X_{n_j}(h_j)} \omega^{n_1}$.

- *Le point crucial du calcul suivant est que, comme* $0 < n_1 < N$, *le nombre* $\zeta_N^{n_1}$ *ne vaut pas* 1 *(par exemple par un calcul d'argument :* $\arg \zeta_N^{n_1} \equiv \frac{2\pi}{N} n_1 \not\equiv 0 \pmod{2\pi}$*) ce qui permettra d'appliquer la formule pour la somme des termes d'une suite géométrique.*

$$\begin{aligned}\sum_{\omega \in \mathbb{U}_N} \omega^{n_1} &= \sum_{k=0}^{N-1} \left(\zeta_N^k\right)^{n_1} \\ &= \sum_{k=0}^{N-1} \left(\zeta_N^{n_1}\right)^k\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1-\left(\zeta_N^{n_1}\right)^N}{1-\zeta_N^{n-1}} && \textit{(car } \zeta_N^{n_1} \neq 1\textit{)} \\ &= 0. && \textit{(car } \left(\zeta_N^N\right)^{n_1} = 1^{n_1} = 1\textit{)} \end{aligned}$$

► *L'autre calcul est complètement semblable : soit* $j \in [\![1, r]\!]$. *On a*

$$\sum_{\omega \in X_{n_j}(h_j)} \omega^{n_1} = \sum_{k=0}^{n_j-1} \left(h\, \zeta_{n_j}^k\right)^{n_1} = h^{n_1} \sum_{k=0}^{n_j-1} \left(\zeta_{n_j}^{n_1}\right)^k.$$

Pour les mêmes raisons que dans le calcul précédent, cette somme vaudra 0*, sauf si* $\zeta_{n_j}^{n_1} = 1$*, auquel cas elle vaudra* $n_j\, h^{n_1}$*.*

Comme $\zeta_{n_j}^{n_1}$ *est un nombre complexe de module* 1 *dont l'argument est*

$$\arg\left(\zeta_{n_j}^{n_1}\right) \equiv n_1 \frac{2\pi}{n_j} \pmod{2\pi},$$

il vaut 1 *si et seulement si* $n_1 \dfrac{2\pi}{n_j} \pmod{2\pi} \equiv 0 \pmod{2\pi}$*, c'est-à-dire si et seulement si l'on a la congruence* $n_1 \equiv 0 \pmod{n_j}$*, ce qui revient au fait que* n_j *divise* n_1*.*

Comme tous les entiers n_j *sont non nuls, et que* n_1 *est le plus petit d'entre eux, cette relation de divisibilité ne peut se produire que si* $n_j = n_1$*.*

In fine,

$$\sum_{\omega \in X_{n_j}(h_j)} \omega^{n_1} = \begin{cases} n_j\, h_j^{n_1} \ (= n_1\, h_j^{n_1}) & \textit{si } n_j = n_1 \\ 0 & \textit{sinon.} \end{cases}$$

19. Montrer $n_1 = n_2$.

Supposons par l'absurde $n_1 \neq n_2$*. Vu les inégalités, cela démontre que* $n_1 < n_2 \leqslant n_3 \leqslant \cdots \leqslant n_r$*. Pour tout* $j \geqslant 2$*, on a donc* $n_1 \neq n_j$ *et la question précédente entraîne* $\displaystyle\sum_{\omega \in X_{n_j}(h_j)} \omega^{n_1} = 0$*.*

On peut alors couper la première somme de la question précédente en utilisant le fait que la famille $\left(X_{n_1}(h_1), X_{n_2}(h_2), \ldots, X_{n_r}(h_r)\right)$ *est une partition de* $\mathbb{U}_n$ *:*

$$0 = \sum_{\omega \in \mathbb{U}_N} \omega^{n_1} = \sum_{\omega \in X_{n_1}(h_1)} \omega^{n_1} + \sum_{\omega \in X_{n_2}(h_2)} \omega^{n_1} + \cdots + \sum_{\omega \in X_{n_r}(h_r)} \omega^{n_1} = n_1\, h_1^{n_1}.$$

Cela fournit la contradiction attendue et conclut la démonstration.

20. Soit $m \geqslant 2$. On appelle *progression arithmétique de module* m tout ensemble de la forme

$$\mathrm{PA}(a, m) = \left\{ a + km \,\middle|\, k \in \mathbb{Z} \right\},$$

pour un certain $a \in \mathbb{Z}$.

Montrer qu'il n'existe pas de partition de $\mathbb{Z}$ en **plusieurs** progressions arithmétiques de modules tous différents.

Supposons par l'absurde qu'il existe $r \geqslant 2$ *et des entiers* $m_1, \ldots, m_r \geqslant 2$ *distincts et* $a_1, \ldots, a_r \in \mathbb{Z}$ *tels que* $\left(P(a_1, m_1), \ldots, P(a_r, m_r)\right)$ *soit une partition de* $\mathbb{Z}$*.*

Quitte à les renuméroter, on suppose $m_1 > m_2 > \cdots > m_r$*.*

On peut trouver un entier N *tel que* N *soit un multiple de tous les* m_j*, strictement plus grand que chacun d'entre eux* ($N = m_1 \cdots m_r$ *convient, par exemple, même si ça n'est pas forcément le plus économique).*

On définit alors, pour tout $j \in [\![1, r]\!]$, $n_j = \dfrac{N}{m_j}$ *et* $h_j = \zeta_N^{a_j}$*. Notons déjà que* $n_1 < n_2 < \cdots < n_r$.

Montrons que $\big(X_{n_1}(h_1), \ldots, X_{n_r}(h_r)\big)$ *est une partition de* $\mathbb{U}_N$*. Cela contredira la question 19 (car, par construction, on a* $n_1 < n_2$*) et conclura la démonstration.*

Soit donc $\omega \in \mathbb{U}_N$*. On peut donc trouver* $b \in \mathbb{Z}$ *tel que* $\omega = \zeta_N^b$*. Pour tout* $j \in [\![1, r]\!]$*, on a la chaîne d'équivalences*

$$\begin{aligned}
\omega \in X_{n_j}(h_j) &\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} : \omega = h_j\, \zeta_{n_j}^k \\
&\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} : \zeta_N^b = \zeta_N^{a_j + k m_j} && \textit{(car } \zeta_{n_j} = \zeta_N^{m_j}\textit{)} \\
&\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} : b \equiv a_j + k m_j \pmod N \\
&\overset{*}{\Leftrightarrow} b \in \mathrm{PA}(a_j, m_j).
\end{aligned}$$

L'équivalence étoilée mérite d'être justifiée par double implication :

- *Si l'on peut trouver* $k \in \mathbb{Z}$ *tel que* $b \equiv a_j + k m_j \pmod N$*, on peut* a fortiori *réduire modulo* m_j *(qui est un diviseur de* N*) et en déduire*

  $$b \equiv a_j + k m_j \equiv a \pmod{m_j},$$

  c'est-à-dire $b \in \mathrm{PA}(a_j, m_j)$.
- *Réciproquement, si* $b \in \mathrm{PA}(a_j, m_j)$*, on peut trouver* $k \in \mathbb{Z}$ *tel que* $b = a_j + k m_j$.

  A fortiori*, on a* $b \equiv a + k m_j \pmod N$.