Deuxième composition de mathématiques

Durée : *4 heures.*

Toute sortie est interdite pendant les dix dernières minutes.

Les documents, calculatrices, etc. sont ***interdits****.*

Le sujet est probablement trop long : ne vous laissez pas impressionner et privilégiez la fiabilité au volume.

Consignes générales de présentation

La présentation de la copie est prise en compte dans l'évaluation.

- *Ne composez pas sur la première page, ce qui me permettra d'écrire mes commentaires.*
- *Merci* $\boxed{\textit{d'encadrer}}$ *ou de* <u>*souligner*</u> *vos résultats.*
- *Numérotez vos copies doubles, et rendez-les dans l'ordre, la première servant de chemise pour les suivantes, qui ne seront pas imbriquées les unes dans les autres.*
- *Les parties trop difficiles à lire de votre copie ne seront pas lues.*

Exercice 1

Dans tout l'exercice, E, F et G sont trois ensembles, et $f : E \to F$ et $g : F \to G$ sont deux applications.

Les deux questions sont indépendantes.

1. **Question de cours.** On suppose f et g surjectives. Montrer que $g \circ f$ est surjective.
2. On suppose $g \circ f$ surjective et g injective. Montrer que f est surjective.

Exercice 2

Dans tout l'exercice, on fixe $a \in \mathbb{C}$ et on considère $f_a : \begin{cases} \mathbb{C} \to & \mathbb{C} \\ z \mapsto & az + \bar{z} \end{cases}$ et $K_a = \left\{ z \in \mathbb{C} \,\middle|\, f_a(z) = 0 \right\}$.

Les trois questions sont largement indépendantes.

1. Exprimer (sans démonstration) l'ensemble K_a sous la forme d'une image réciproque.
2. (a) Montrer que f_a est injective si et seulement si $K_a = \{0\}$.
   (b) En déduire que f_a est injective si et seulement si $|a| \neq 1$.
3. Montrer que $f_a[\mathbb{C}] = \mathbb{R}$ si et seulement si $a = 1$.

Exercice 3

Soit E et F deux ensembles et $f : E \to F$ une application.

1. Montrer que l'assertion

$$\forall A, B \in \mathscr{P}(E), f[A] \subseteq f[B] \Rightarrow A \subseteq B$$

   est équivalente à l'injectivité de f.
2. À quoi équivaut l'assertion

$$\forall C, D \in \mathscr{P}(F), f^{-1}[C] \subseteq f^{-1}[D] \Rightarrow C \subseteq D\ ?$$

Problème. Quelques théorèmes sur les polygones réguliers.

Soit $n \geqslant 2$. Dans tout le problème, on utilise les notations suivantes.

- Comme d'habitude, on notera ζ_n le nombre complexe $\exp\left(i\frac{2\pi}{n}\right)$. Si n est clair dans le contexte, on pourra simplement le noter ζ.
- Pour $g, h \in \mathbb{C}$, on notera $\Pi_n(g,h)$ le n-uplet de nombres complexes

$$\Pi_n(g,h) = \left(g+h, g+\zeta_n h, g+\zeta_n^2 h, \ldots, g+\zeta_n^{n-1} h\right).$$

  Informellement, si $n \geqslant 3$, il s'agit du n-uplet formé des sommets d'un n-gone régulier, parcouru dans le sens direct. Cependant, on reviendra systématiquement à la définition ou aux questions précédentes, et on ne cherchera pas à utiliser de résultats « évidents » sur les n-gones réguliers.
- Étant donné un n-uplet $p = (z_0, z_1, \ldots, z_{n-1}) \in \mathbb{C}^n$ et un entier $k \in [\![0, n-1]\!]$, on notera $p[k] = z_k$. Par exemple, si $n = 3$ et $p = (a, b, c)$, on a $p[0] = a$, $p[1] = b$ et $p[2] = c$. On notera que cela signifie que les n éléments d'un n-uplet sont numérotés de 0 à $n-1$, comme chez les informaticiens. Cette convention a été choisie pour avoir la formule $\forall g, h \in \mathbb{C}, \forall k \in [\![0, n-1]\!], \Pi_n(g,h)[k] = g + \zeta_n^k h$, que l'on pourra utiliser librement.
- Enfin, on notera Pol_n l'ensemble des n-uplets de la forme $\Pi_n(g,h)$, c'est-à-dire

$$\mathrm{Pol}_n = \left\{\Pi_n(g,h) \,\middle|\, g, h \in \mathbb{C}\right\}.$$

Traiter la première partie vous aidera à digérer ces notations. Une fois cela fait, vous pouvez considérer les parties ultérieures comme indépendantes les unes des autres. J'ai cependant essayé de les classer par difficulté à peu près croissante.

Partie I. Généralités.

1. Déterminer exactement $\Pi_4(1+i, 2+3i)$.

   On donnera les éléments de ce quadruplet sous forme algébrique, puis on les dessinera.
2. Soit $n \geqslant 3$, $g, h \in \mathbb{C}$.

   Calculer $\displaystyle\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \Pi_n(g,h)[k]$ et donner l'interprétation géométrique de ce calcul.
3. Soit $n \geqslant 3$, $g \in \mathbb{C}$ et $h \in \mathbb{C}^*$. On pose $a = \Pi_n(g,h)[0]$, $b = \Pi_n(g,h)[1]$ et $c = \Pi_n(g,h)[2]$.

   Calculer la forme exponentielle du quotient $\dfrac{a-b}{c-b}$ et interpréter géométriquement le résultat.
4. Soit $n \geqslant 3$. Montrer que Pol_n est stable par combinaison linéaire, c'est-à-dire que

$$\forall p_1, p_2 \in \mathrm{Pol}_n, \forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}, \lambda_1 p_1 + \lambda_2 p_2 \in \mathrm{Pol}_n.$$

5. Montrer $\left(\zeta_6, -1, \overline{\zeta_6}\right) \in \mathrm{Pol}_3$ et $\left(\zeta_6, \overline{\zeta_6}, -1\right) \notin \mathrm{Pol}_3$.
6. Soit $n \geqslant 3$. Montrer que l'application

$$\varphi : \begin{cases} \mathrm{Pol}_n \to \mathbb{C}^2 \\ p \mapsto (p[0], p[1]) \end{cases}$$

   est bijective.
7. Soit $n \geqslant 3$.
   (a) Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $\forall k \in [\![0, n-1]\!], \mathrm{Ré}\left(\zeta_n^k z\right) = 0$. Montrer que $z = 0$.
   (b) Soit $g \in \mathbb{C}$ et $h \in \mathbb{C}^*$ tel que tous les éléments de $\Pi_n(g,h)$ soient de module 1.

   Montrer que $g = 0$.

Partie II. *Fair and square* : le théorème de Finsler-Hadwiger (1938).

Wenn zwei Quadrate eine Ecke geimeinsam haben, so bilden ihre Mittelpunkte die Gegenecken eines Quadrats, dessen andere Gegenecken in die Mitte zwischen entsprechende Ecken sind dabei der gemeinsamen Ecke benachbart, aber mit entgegengesetztem Umlaufsinn.

Paul Finsler, Hugo Hadwiger, *Einige Relationen im Dreieck*.

Soit $a, b, b' \in \mathbb{C}$.

D'après la question 6, on peut trouver (c, d) et $(c', d') \in \mathbb{C}^2$ tels que $(a, b, c, d), (a, b', c', d') \in \mathrm{Pol}_4$.

On pose $g = \dfrac{a+b+c+d}{4}$ et $g' = \dfrac{a+b'+c'+d'}{4}$, ainsi que $m = \dfrac{b+d'}{2}$ et $m' = \dfrac{b'+d}{2}$.

Le but de cette partie est de montrer que $(g, m', g', m) \in \mathrm{Pol}_4$.

8. Dessiner proprement la situation décrite, en plaçant les onze points que nous avons définis.
9. (a) En utilisant le fait que $(a, b, c, d) \in \mathrm{Pol}_4$, exprimer c, d et g en fonction de a et b.
   (b) En déduire une expression de m et m' en fonction de a, b et b'.
10. Soit $p = (z_0, z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{C}^4$.

    Montrer que $p \in \mathrm{Pol}_4$ si et seulement si $z_0 - z_1 + z_2 - z_3 = z_0 + iz_1 - z_2 - iz_3 = 0$.
11. Conclure.

Partie III. Une observation de Kepler sur l'heptagone régulier (1619).

Magna res agitur, per hunc enim effectum stetit, quo minus Heptagonus & caeteræ hujus generis figuræ, à Deo fuerint adhibitæ ad ornatum Mundi, ut sunt quidem adhibitæ scibiles figuræ in superioribus explicatæ.

Johannes Kepler, *Harmonice Mundi*, XLV.

Cette partie se concentre sur le plus simple des heptagones réguliers : $\Pi_7(0, 1) = (1, \zeta_7, \zeta_7^2, \ldots, \zeta_7^6)$.

Pour tout $k \in \{1, 2, 3\}$, on note $s_k = |\zeta_7^k - 1|^2$.

12. Exprimer s_1, s_2 et s_3 à l'aide de la fonction sinus.
13. Montrer $\left\{ |\omega_1 - \omega_2|^2 \;\middle|\; \omega_1, \omega_2 \in \mathbb{U}_7 \right\} = \{0, s_1, s_2, s_3\}$.

Le but des dernières questions est de trouver une équation de degré 3 à coefficients entiers dont les solutions sont exactement s_1, s_2 et s_3.

14. Exprimer s_1, s_2 et s_3 en fonction des puissances de ζ_7.

    (On pourra commencer par « développer » l'expression $|\omega - 1|^2$ pour un élément quelconque $\omega \in \mathbb{U}_7$.)
15. À l'aide de la question précédente, calculer successivement les nombres réels suivants :
    - la somme $\alpha = s_1 + s_2 + s_3$;
    - la somme $\beta = s_1 s_2 + s_1 s_3 + s_2 s_3$;
    - le produit $\gamma = s_1 s_2 s_3$.
16. Soit $x \in \mathbb{C}$. Développer $(x - s_1)(x - s_2)(x - s_3)$ et conclure.

    On présentera d'abord l'équation de degré 3 à l'aide de α, β et γ avant de remplacer ces lettres par les nombres trouvés à la question précédente.

Partie IV. Une conjecture d'Erdős (1952).

Azt sejtettem, hogy ha a (6) alatti rendszer lefedő, akkor $\displaystyle\sum_{i=1}^{k} \frac{1}{n_i} > 1$, *vagyis a rendszer nem egyszeresen fedi le az egész számokat.*

Erdős Pál, *Egy kongruenciarendszerekről szóló problémáról*.

Soit $N \geqslant 3$.

On va considérer dans cette partie des polygones réguliers contenus dans $\mathbb{U}_N$, et donc dans $\mathbb{U}$. À la lumière de la question 7, il est naturel de se limiter aux polygones centrés en 0.

On abandonne les n-uplets et on considère désormais des parties de $\mathbb{U}$ qui forment un polygone régulier. Plus précisément, pour $n \geqslant 2$ et $h \in \mathbb{U}$, on notera

$$X_n(h) = \left\{h, \zeta_n h, \zeta_n^2 h, \dots, \zeta_n^{n-1} h\right\}.$$

On va considérer les façons de **partitionner** $\mathbb{U}_N$ en polygones réguliers. Plus précisément, on se donne un entier $r \geqslant 2$, des entiers $2 \leqslant n_1 \leqslant n_2 \leqslant \cdots \leqslant n_r < N$ et des éléments $h_1, \dots, h_r \in \mathbb{U}$ tels que la famille $\left(X_{n_1}(h_1), X_{n_2}(h_2), \dots, X_{n_r}(h_r)\right)$ soit une partition de $\mathbb{U}_N$.

17. Donner un exemple avec $N = 8$ et $r = 3$. (Un dessin clair suffira).
18. Calculer $\displaystyle\sum_{\omega \in \mathbb{U}_N} \omega^{n_1}$ et, pour tout $j \in [\![1, r]\!]$, $\displaystyle\sum_{\omega \in X_{n_j}(h_j)} \omega^{n_1}$.
19. Montrer $n_1 = n_2$.
20. Soit $m \geqslant 2$. On appelle *progression arithmétique de module* m tout ensemble de la forme

    $$\mathrm{PA}(a, m) = \left\{a + km \,\middle|\, k \in \mathbb{Z}\right\},$$

    pour un certain $a \in \mathbb{Z}$.

    Montrer qu'il n'existe pas de partition de $\mathbb{Z}$ en **plusieurs** progressions arithmétiques de modules tous différents.