Cinquième composition de mathématiques [corrigé]

Exercice 1

On fixe dans cet exercice $\rho \in \mathbb{R}$. On considère alors une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$u_0 = 0, \qquad u_1 = 1 \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = (1+\rho)u_{n+1} - \rho\, u_n.$$

1. Déterminer, en fonction de ρ, une expression simple de la suite u.

   Le polynôme caractéristique de cette relation de récurrence est $X^2 - (1+\rho)X + \rho = (X-\rho)(X-1)$. *Il y a ainsi deux cas à considérer.*

   - *Dans le* ***cas générique*** *où* $\rho \neq 1$, *on sait qu'il existe* $R, S \in \mathbb{R}$ *tels que* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} = (R\,\rho^n + S)_{n\in\mathbb{N}}$.

     L'examen des premières valeurs (et la résolution d'un petit système linéaire) permettent de montrer que $R = \dfrac{1}{\rho-1}$ *et* $S = -\dfrac{1}{\rho-1}$.

     Ainsi, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} = \left(\dfrac{\rho^n - 1}{\rho - 1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$.
   - *Dans le* ***cas exceptionnel*** *où* $\rho = 1$, *on sait qu'il existe* $A, B \in \mathbb{R}$ *tels que* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} = \big(An+B\big)_{n\in\mathbb{N}}$. *L'examen des premières valeurs est alors immédiat et montre que* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} = \big(n\big)_{n\in\mathbb{N}}$.

   Remarque. *Je n'ai pas vraiment fait exprès mais on voit que dans tous les cas,* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} = \left(\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \rho^k\right)_{n\in\mathbb{N}}$.

2. Pour quelles valeurs de ρ a-t-on $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geqslant 0$?

   En utilisant la relation de récurrence (ou la remarque à la fin de la première question), $u_2 = 1+\rho$. *Ainsi, une* ***condition nécessaire*** *pour que* u *soit à valeurs positives est que* $\rho \geqslant -1$.

   Montrons que, réciproquement, cette condition ***suffit***. *Supposons* $\rho \geqslant -1$.

   - *Supposons* $\rho \in [-1, 1[$. *Soit* $n \in \mathbb{N}$.

     On a alors $\left|\rho^n\right| = |\rho|^n \leqslant 1$, *si bien que* $\rho^n \in [-1, 1]$. *On en déduit que* $\rho^n - 1 \leqslant -1$ *et* $\rho - 1 < 0$, *si bien que* $u_n = \dfrac{\rho^n - 1}{\rho - 1} \geqslant 0$.
   - *Évidemment, si* $\rho = 1$, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} = (n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est à valeurs positives.*
   - *Tout aussi évidemment, si* $\rho > 1$, *on a pour tout* $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \dfrac{\rho^n - 1}{\rho - 1} \geqslant 0$, *car numérateur et dénominateur sont tous deux positifs.*

   Ainsi, l'assertion $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geqslant 0$ *équivaut à* $\rho \geqslant -1$.

Exercice 2

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $S_n = \sum_{k=1}^{2n+1} \frac{1}{\sqrt{n^2+k}}$. Montrer que $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et déterminer sa limite.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ (pour éviter de diviser par zéro un peu plus tard).

Pour tout $k \in [\![1, 2n+1]\!]$, la décroissance de $\mapsto \frac{1}{\sqrt{t}}$ sur $\mathbb{R}_+^*$ fournit les encadrements

$$\frac{1}{n+1} = \frac{1}{\sqrt{n^2+2n+1}} \leqslant \frac{1}{\sqrt{n^2+k}} \leqslant \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} \leqslant \frac{1}{\sqrt{n^2}} = \frac{1}{n}.$$

En sommant ces encadrements, on obtient

$$\frac{2n+1}{n+1} = \sum_{k=1}^{2n+1} \frac{1}{n+1} \leqslant S_n \leqslant \sum_{k=1}^{2n+1} \frac{1}{n} = \frac{2n+1}{n}.$$

Comme les deux suites $\left(\frac{2n+1}{n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\left(\frac{2n+1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ convergent vers 2, le théorème des gendarmes garantit que $S_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 2$.

Exercice 3

1. Soit v une suite réelle vérifiant $v_0 > 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} = \sqrt{v_n}$.
   (a) Montrer que la suite v est à valeurs strictement positives.

   Il s'agit d'une récurrence immédiate, basée sur la propriété de stabilité $\forall t \in \mathbb{R}_+^* \sqrt{t} > 0$, elle-même conséquence directe de la stricte croissance de la fonction racine. Je ne donne pas les détails.

   (b) Déterminer une expression de $\big(\ln(v_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$. Qu'en déduit-on sur v_n quand $n \to +\infty$?

   - *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\ln(v_{n+1}) = \ln\big(\sqrt{v_n}\big) = \frac{1}{2}\ln(v_n)$, donc la suite $\big(\ln(v_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique, de raison $\frac{1}{2}$. On en déduit $\forall n \in \mathbb{N}, \ln(v_n) = \frac{\ln(v_0)}{2^n}$.*
   - *L'expression ci-dessus (ou le cours sur les suites géométriques) montre que $\ln(v_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. En passant à l'exponentielle (plus formellement : en utilisant la continuité de l'exponentielle en 0), on en déduit $v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$.*

Dans la suite de l'exercice, on fixe une suite réelle u vérifiant $u_0 > 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sqrt{u_n} + \frac{1}{n+1}$.

2. Montrer qu'à partir d'un certain rang, la suite u est à valeurs dans $[1, +\infty[$.

   Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, notons $P(n)$ l'assertion $u_n \in [1, +\infty[$.

   Montrons $\forall n \in \mathbb{N}^*, P(n)$ par récurrence, ce qui conclura.

   Initialisation. *On a $u_0 > 0$, donc $u_1 = u_0 + 1 > 1$.* A fortiori, *$u_1 \in [1, +\infty[$, ce qui montre $P(1)$.*
   Hérédité. *Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $P(n)$, c'est-à-dire tel que $u_n \geqslant 1$.*

   Par croissance de la fonction $\sqrt{\cdot}$, on a $u_{n+1} = \sqrt{u_n} + \frac{1}{n+1} \geqslant \sqrt{u_n} \geqslant 1$, ce qui montre $P(n+1)$ et clôt la récurrence.

3. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que si $u_{n+1} \leqslant u_n$, alors $u_{n+2} \leqslant u_{n+1}$.

   Supposons $u_{n+1} \leqslant u_n$. On a alors

$$\begin{aligned} u_{n+2} - u_{n+1} &= \left(\sqrt{u_{n+1}} + \frac{1}{n+2}\right) - \left(\sqrt{u_n} + \frac{1}{n+1}\right) \\ &= \sqrt{u_{n+1}} - \sqrt{u_n} - \frac{1}{(n+1)(n+2)} \leqslant \sqrt{u_{n+1}} - \sqrt{u_n} \leqslant 0, \end{aligned}$$

   par croissance de la fonction $\sqrt{\cdot}$. Ainsi, $u_{n+2} \leqslant u_{n+1}$.

4. Montrer que la suite u est monotone à partir d'un certain rang.

   - *S'il existe un rang $N \in \mathbb{N}$ tel que $u_{N+1} \leqslant u_N$, la question précédente et une récurrence immédiate montrent que $\forall n \geqslant N, u_{n+1} \leqslant u_n$. Dans ce cas, la suite u décroît à partir d'un certain rang.*
   - *Dans le cas contraire, on a, pour tout $N \in \mathbb{N}$, $u_{N+1} > u_N$, donc la suite u croît (et même strictement).*

5. Montrer que la suite u converge, et déterminer sa limite.

   On distingue deux cas, grâce à la question précédente.

   - *Supposons u décroissante à partir d'un certain rang.*

     On sait que u est minorée (on a par exemple montré qu'elle était $\geqslant 1$ à partir d'un certain rang). Le théorème de la limite monotone entraîne alors qu'elle converge.
   - *Supposons u croissante à partir d'un certain rang. D'après le théorème de la limite monotone, il suffit de montrer que u est majorée.*

     Supposons par l'absurde que ce ne soit pas le cas. Le théorème de la limite monotone entraîne alors que $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.

     On a alors $u_{n+1} - u_n = \sqrt{u_n} + \dfrac{1}{n+1} - u_n = \sqrt{u_n}\left(1 - \sqrt{u_n}\right) + \dfrac{1}{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\infty$, par opérations. On en déduit que $u_{n+1} - u_n < 0$ à partir d'un certain rang, ce qui contredit la croissance (à partir d'un certain rang) de u.

   Dans tous les cas, la suite u converge. Notons ℓ sa limite. Par passage à la limite dans les inégalités larges, on a $\ell \geqslant 1$.

   Dans ce cas, on a d'une part $u_{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$ par extraction et $u_{n+1} = \sqrt{u_n} + \dfrac{1}{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \sqrt{\ell}$.

   Par unicité de la limite, on a $\sqrt{\ell} = \ell$, c'est-à-dire $\ell = 1$ (car on sait déjà que $\ell \geqslant 1$, donc 0 est exclu), si bien que $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$.

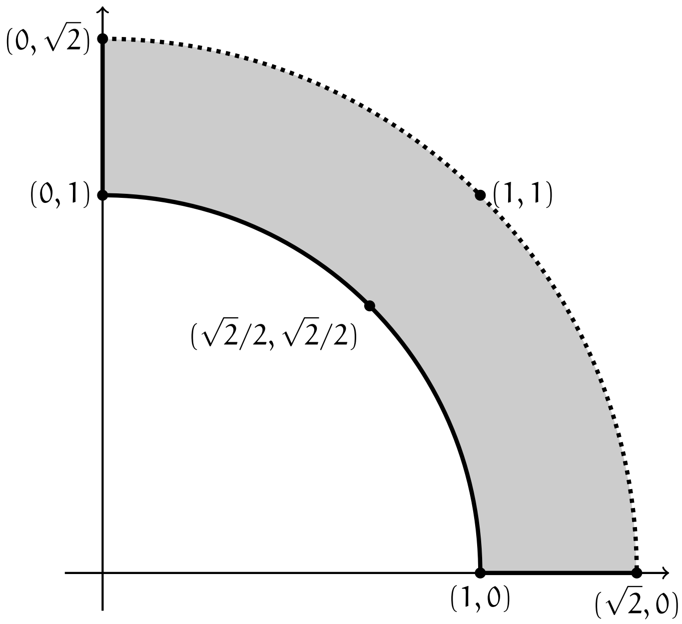
   Remarque. A posteriori*, on pourrait montrer que cela entraîne en fait que la suite u décroissait à partir d'un certain rang : le cas croissant ne se produit pas du tout.*

Exercice 4

On note $\Delta = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}_+^2 \,\middle|\, 1 \leqslant x^2 + y^2 < 2\right\}$ et $A = \{xy \mid (x,y) \in \Delta\}$.

1. Dessiner Δ.

   Δ est le « quart nord-est » d'une « couronne » centrée en 0, comprise entre les cercles de rayon 1 (inclus dans Δ) et $\sqrt{2}$ (exclu de Δ). On place quelques points sur le dessin pour le préciser (mais tous n'appartiennent pas à Δ).



2. Montrer que A possède une borne supérieure et une borne inférieure, et les déterminer.

   - *Les coordonnées des éléments de Δ étant positives, on voit directement que $A \subseteq \mathbb{R}_+$. En particulier, A est non vide (il contient 0, car $(1,0) \in \Delta$) et minoré (par 0).*

     Cela démontre que A possède une borne inférieure mais cela fait mieux, en montrant que 0 est le minimum de A.

     On a donc $\inf A = \min A = 0$.
   - *Soit $p \in A$. On peut donc trouver $(x,y) \in \Delta$ tel que $p = xy$. On en déduit que*

     $$p = xy \leqslant \frac{x^2+y^2}{2} < \frac{2}{2} = 1,$$

     si bien que A est majoré (par 1). Comme il est toujours non vide, il possède une borne supérieure.

     On va montrer que $1 \in \overline{A}$, ce qui garantira $1 = \sup A$.

     On vérifie que la suite croissante $\left(1 - \frac{1}{n}\right)_{n \geqslant 4}$ est à valeurs dans l'intervalle $\left[\frac{\sqrt{2}}{2}, 1\right[$. On en déduit que, pour tout $n \geqslant 4$, $1 \leqslant \left(1-\frac{1}{n}\right)^2 + \left(1-\frac{1}{n}\right)^2 < 2$, c'est-à-dire que le point $\left(1-\frac{1}{n}, 1-\frac{1}{n}\right)$ appartient à Δ, et donc que le produit $\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{1}{n}\right) = \left(1-\frac{1}{n}\right)^2$ appartient à A.*

     Comme $\left(1-\frac{1}{n}\right)^2 \xrightarrow[n \to +\infty]{} 1$ (par opérations), on a bien $1 \in \overline{A}$, ce qui conclut.

*. ce que l'on peut faire sans approximation : $8 \leqslant 9$, donc $2\sqrt{2} \leqslant 3$ par croissance de la racine carrée, donc $\sqrt{2}/2 \leqslant 3/4$.

Exercice 5

On dira dans cet exercice qu'une suite $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ est *pseudo-décroissante* si

$$\forall n \in \mathbb{N}, \exists N \in \mathbb{N} : \forall p \geqslant N, u_p \leqslant u_n.$$

1. Soit $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ une suite à valeurs > 0 telle que $u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$. Montrer que u est pseudo-décroissante.

   Soit $n \in \mathbb{N}$. On sait que $u_n > 0$ mais que la suite u converge vers 0.

   En particulier, elle doit être $< u_n$ à partir d'un certain rang (par « antipassage à la limite ») : on peut trouver $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall p \geqslant N, u_p < u_n$.

   A fortiori*, on a $\forall p \geqslant N, u_p \leqslant u_n$, ce qui démontre la pseudo-décroissance de u.*

2. Soit $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ une suite pseudo-décroissante et minorée. Montrer que u converge.

   On recopie pour ainsi dire la démonstration du théorème de la limite monotone vue en cours.

   Considérons $V = \{u_n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Comme la suite u est minorée, l'ensemble V est minoré. Il contient par ailleurs u_0, si bien qu'il est non vide.

   On peut alors considérer $\ell = \inf V$. Montrons que $u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} \ell$.

   Soit $\varepsilon > 0$.

   Comme $\ell = \inf V \in \overline{V}$, on peut trouver $v \in V$ tel que $|v - \ell| \leqslant \varepsilon$. Puisque ℓ minore V, on a même l'encadrement plus précis $\ell \leqslant v \leqslant \ell + \varepsilon$.

   On peut trouver $n \in \mathbb{N}$ tel que $v = u_n$.

   Par pseudo-décroissance, on peut trouver $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall p \geqslant N, u_p \leqslant u_n$.

   Soit maintenant $p \geqslant N$.

   - *Comme $u_p \in V$ et que ℓ minore V, on a $\ell \leqslant u_p$.*
   - *Par définition de N, on a $u_p \leqslant u_n \leqslant \ell + \varepsilon$.*

   On a donc l'encadrement $\ell \leqslant u_p \leqslant \ell + \varepsilon$, ce qui donne a fortiori *$|u_p - \ell| \leqslant \varepsilon$ et conclut la démonstration de la convergence $u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} \ell$.*

Problème. Matrices bistochastiques.

Partie I. Généralités.

1. **Matrices de permutation.**

   (a) Soit $\sigma \in \Sigma_n$ et $j \in [\![1, n]\!]$. Montrer $P_\sigma\, e_j = e_{\sigma(j)}$.

   Soit $i \in [\![1, n]\!]$. *On a (en notant* $[X]_{i,\bullet}$ *plutôt que* $[X]_{i,1}$ *la* i*-ème coordonnée d'une colonne* $X \in \mathbb{C}^n$*) :*

   $$[P_\sigma\, e_j]_{i,\bullet} = \sum_{k=1}^{n} [P_\sigma]_{i,k} \underbrace{[e_j]_{k,\bullet}}_{=\mathbb{1}_{(j=k)}} = [P_\sigma]_{i,j} = \mathbb{1}_{(i=\sigma(j))}.$$

   Autrement dit, le vecteur colonne $P_\sigma\, e_j$ *a sa* $\sigma(j)$*-ième coordonnée qui vaut* 1*, et les autres* 0*, c'est-à-dire que* $P_\sigma\, e_j = e_{\sigma(j)}$*.*

   (b) Soit $\sigma, \tau \in \Sigma_n$. Montrer $P_\sigma\, P_\tau = P_{\sigma\circ\tau}$.

   Soit $j \in [\![1, n]\!]$*. On a d'après la question précédente*

   $$P_\sigma\, P_\tau\, e_j = P_\sigma e_{\tau(j)} = e_{\sigma(\tau(j))} = P_{\sigma\circ\tau}\, e_j.$$

   Autrement dit, $C_j\,(P_\sigma\, P_\tau) = C_j\,(P_{\sigma\circ\tau})$*.*

   Comme cela est vrai pour tout $j \in [\![1, n]\!]$*, on a* $P_\sigma\, P_\tau = P_{\sigma\circ\tau}$*.*

   (c) Soit $\sigma \in \Sigma_n$. Montrer que P_σ est inversible et que $P_\sigma^{-1} = P_\sigma^T$.

   - *D'après la question précédente, on a* $P_\sigma P_{\sigma^{-1}} = P_{\sigma^{-1}} P_\sigma = P_{\mathrm{id}_{[\![1,n]\!]}} = I_n$*, ce qui montre que* P_σ *est inversible, d'inverse* P_σ^{-1}*.*
   - *Il reste à montrer que* $P_{\sigma^{-1}} = P_\sigma^T$*. Soit* $i, j \in [\![1, n]\!]$*.*

     On a $[P_{\sigma^{-1}}]_{i,j} = \mathbb{1}_{(i=\sigma^{-1}(j))}$ *et* $[P_\sigma^T]_{i,j} = [P_\sigma]_{j,i} = \mathbb{1}_{(j=\sigma(i))}$*.*

     Les conditions $i = \sigma^{-1}(j)$ *et* $j = \sigma(i)$ *étant équivalentes, ces deux coefficients sont bien égaux.*

2. **Une première caractérisation des matrices bistochastiques.**

   (a) Soit $M \in M_n(\mathbb{R})$. Montrer que $M \in \mathscr{B}_n$ si et seulement si $M \geqslant 0$ et $Mu = M^T u = u$.

   Il suffit de remarquer que

   $$M\begin{pmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\sum_{j=1}^{n}[M]_{1,j}\\ \sum_{j=1}^{n}[M]_{2,j}\\ \vdots\\ \sum_{j=1}^{n}[M]_{n,j}\end{pmatrix} :$$

   l'égalité $Mu = u$ *équivaut donc au fait que la somme des éléments de chaque ligne de* M *vaut* 1*.*

   En appliquant ce fait à M^T*, on voit donc que l'égalité* $M^T u = u$ *équivaut au fait que la somme des éléments de chaque colonne de* M *vaut* 1*.*

   Ainsi, on a bien $M \in \mathscr{B}_n \Leftrightarrow (M \geqslant 0$ *et* $Mu = M^T u = u)$*.*

(b) En déduire que $\mathscr{B}_n$ est stable par produit, c'est-à-dire que $\forall M, N \in \mathscr{B}_n, MN \in \mathscr{B}_n$.

Soit $M, N \in \mathscr{B}_n$.

- *Pour tous* $i, j \in [\![1, n]\!]$, *on a* $[MN]_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} \underbrace{[M]_{i,k}}_{\geqslant 0} \underbrace{[N]_{k,j}}_{\geqslant 0} \geqslant 0$, *donc* $MN \geqslant 0$.
- *On a* $MNu = Mu = u$.
- *On a* $(MN)^T u = N^T M^T u = N^T u = u$.

À l'aide de la question précédente, cela montre que $MN \in \mathscr{B}_n$.

3. Donner un exemple de matrice non inversible appartenant à $\mathscr{B}_n$.

La matrice $J = \dfrac{1}{n} \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$ *est clairement bistochastique.*

Le vecteur non nul $e_1 - e_2$ *appartient à* $\ker(J)$, *ce qui prouve que* J *n'est pas inversible.*

4. **Matrices bistochastiques inversibles.** Soit $M \in \mathscr{B}_n \cap GL_n(\mathbb{R})$.

(a) Montrer que $M^{-1} \in \mathscr{B}_n$ si et seulement si $M^{-1} \geqslant 0$.

Puisque M *est inversible,* M^T *l'est aussi, et on sait que son inverse est* $(M^T)^{-1} = (M^{-1})^T$.

En multipliant à gauche l'égalité $Mu = u$ *(resp.* $M^T u = u$*) par l'inverse de* M *(resp.* M^T*), on obtient* $u = M^{-1}u$ *(resp.* $u = (M^{-1})^T u$*).*

Cela montre que la matrice M^{-1} *possède automatiquement deux des trois propriétés caractérisant la bistochasticité.*

On a donc $M^{-1} \in \mathscr{B}_n$ *si et seulement si* $M^{-1} \geqslant 0$.

(b) Supposons $M^{-1} \in \mathscr{B}_n$. On va montrer qu'alors M est une matrice de permutation.

i. En utilisant l'égalité $M^{-1}M = I_n$, montrer

$$\forall i, j \in [\![1, n]\!], [M]_{i,j} \neq 0 \Rightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R} : C_i(M^{-1}) = \lambda e_j.$$

Soit $i, j \in [\![1, n]\!]$ *tel que* $[M]_{i,j} \neq 0$.

On souhaite montrer que la i*-ème colonne de* M^{-1} *est proportionnelle à* e_j, *c'est-à-dire que, pour tout* $k \neq j$, $[M^{-1}]_{k,i} = 0$.

Soit donc $k \in [\![1, n]\!] \setminus \{j\}$. *On a alors, en utilisant que les coefficients de* M *et de* M^{-1} *sont positifs :*

$$0 = [I_n]_{k,j} = \sum_{\ell=1}^{n} [M^{-1}]_{k,\ell} [M]_{\ell,j} \geqslant \underbrace{[M^{-1}]_{k,i}}_{\geqslant 0} \underbrace{[M]_{i,j}}_{>0} \qquad \text{donc} \qquad [M^{-1}]_{k,i} = 0,$$

ce qui conclut.

ii. En déduire que, pour tout $j \in [\![1, n]\!]$, il existe un unique $i \in [\![1, n]\!]$ tel que $[M]_{i,j} \neq 0$, et qu'on a alors $[M]_{i,j} = 1$.

Soit $j \in [\![1, n]\!]$.

Existence. *S'il n'existait pas d'indice* $i \in [\![1, n]\!]$ *tel que* $[M]_{i,j} \neq 0$, *la* j*-ième colonne de* M *serait nulle, ce qui contredit son inversibilité.*

Unicité. *S'il existait* $i_0 \neq i_1 \in [\![1, n]\!]$ *tels que* $[M]_{i_0,j}$ *et* $[M]_{i_1,j}$ *soient non nuls, la question précédente entraînerait l'existence de* $\lambda_0, \lambda_1 \in \mathbb{R}$ *tels que*

$$C_{i_0}(M^{-1}) = \lambda_0 e_j \qquad \textit{et} \qquad C_{i_1}(M^{-1}) = \lambda_1 e_j.$$

On en déduit $\lambda_1 C_{i_0}(M^{-1}) - \lambda_0 C_{i_1}(M^{-1}) = 0$*, c'est-à-dire* $M^{-1}\big(\lambda_1 e_{i_0} - \lambda_0 e_{i_1}\big) = 0$*, et on va voir que cela contredit l'inversibilité de* M^{-1}*.*

- *Si* $\lambda_0 = 0$ *ou* $\lambda_1 = 0$*,* M^{-1} *a une colonne nulle, donc n'est pas inversible.*
- *Si* $\lambda_0, \lambda_1 \neq 0$*, le vecteur* $\lambda_1 e_{i_0} - \lambda_0 e_{i_1}$ *n'est pas nul, donc* $\ker(M^{-1})$ *n'est pas réduit au vecteur nul, ce qui montre que* M^{-1} *n'est pas inversible.*

Dans les deux cas, on a obtenu une contradiction, ce qui conclut.

On a donc montré l'existence et l'unicité de $i \in [\![1, n]\!]$ *tel que* $[M]_{i,j} \neq 0$*.*

Comme M *est bistochastique et que* $[M]_{i,j}$ *est le seul coefficient non nul de* $C_j(M)$*, on a nécessairement* $[M]_{i,j} = 1$*.*

iii. La question précédente montre que l'on peut trouver une fonction $\sigma : [\![1, n]\!] \to [\![1, n]\!]$ telle que $\forall i, j \in [\![1, n]\!], [M]_{i,j} = \mathbb{1}_{(i=\sigma(j))}$. Montrer $\sigma \in \Sigma_n$, c'est-à-dire que σ est bijective.

- *Montrons d'abord que* σ *est injective.*

  Soit $j_0, j_1 \in [\![1, n]\!]$ *tels que* $\sigma(j_0) = \sigma(j_1)$*.*

  On a donc $C_{j_0}(M) = C_{j_1(M)}$*, d'où* $M(e_{j_0} - e_{j_1}) = 0$*.*

  Comme M *est inversible, cela entraîne* $e_{j_0} - e_{j_1} = 0$*, et donc* $j_0 = j_1$*.*
- *(Les théorèmes sur les ensembles finis montreront en fait que l'injectivité de* σ *montre automatiquement sa surjectivité. L'argument suivant sera donc inutile).*

  Soit $i \in [\![1, n]\!]$*. Si* i *n'avait pas d'antécédent, la* i*-ième ligne de* M *serait entièrement nulle. Il en va alors de même de la* i*-ème ligne de* $M M^{-1} = I_n$*, contradiction manifeste. L'application* σ *est donc surjective.*

5. **Propriétés spectrales des matrices bistochastiques.** Soit $M \in \mathscr{B}_n$.

(a) Montrer que $M - I_n$ n'est pas inversible.

On a $Mu = u$*, donc* $(M - I_n)u = 0$*. Cela montre que le noyau de* $M - I_n$ *n'est pas réduit au vecteur nul, et donc que* $M - I_n$ *n'est pas inversible.*

(b) Montrer $\forall X \in \mathbb{C}^n, \|MX\|_\infty \leqslant \|X\|_\infty$.

Soit $X \in \mathbb{C}^n$ *et* $k \in [\![1, n]\!]$*. On a donc*

$$\begin{aligned}
|[MX]_{k,\bullet}| &= \left| \sum_{\ell=1}^{n} [M]_{k,\ell} [X]_{\ell,\bullet} \right| \\
&\leqslant \sum_{\ell=1}^{n} [M]_{k,\ell} \underbrace{|[X]_{\ell,\bullet}|}_{\leqslant \|X\|_\infty} && \textit{(in. triang. et } M \geqslant 0\textit{)} \\
&\leqslant \left(\sum_{\ell=1}^{n} [M]_{k,\ell} \right) \|X\|_\infty \\
&\leqslant \|X\|_\infty. && \textit{(car } M \in \mathscr{B}_n\textit{)}
\end{aligned}$$

(c) En déduire que pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$ de module > 1, la matrice $M - \lambda I_n$ est inversible.

Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ *de module* > 1.

Soit $X \in \ker(M - \lambda I_n)$. *On a donc* $(M - \lambda I_n)X = 0$, *c'est-à-dire* $MX = \lambda X$.

- *D'après la question précédente, on a* $\|MX\|_\infty \leqslant \|X\|_\infty$.
- *Par ailleurs,* $\|MX\|_\infty = \|\lambda X\|_\infty = |\lambda| \; \|X\|_\infty$.

En comparant ces deux informations, on a $\underbrace{(|\lambda| - 1)}_{>0} \|X\|_\infty \leqslant 0$, *ce qui montre* $\|X\|_\infty = 0$.

Par définition de $\|\cdot\|_\infty$, *on en déduit que tous les coefficients de* X *sont nuls, c'est-à-dire que* $X = 0$.

On a ainsi montré $\ker(M - \lambda I_n) = \{0\}$, *ce qui montre que* $M - \lambda I_n$ *est inversible, d'après le critère nucléaire d'inversibilité.*

Partie II. Un processus de diffusion.

6. **Diagonalisation d'une matrice de permutation.** On définit un élément $\sigma \in \Sigma_n$ par :

$$\sigma : \begin{cases} [\![1, n]\!] \to & [\![1, n]\!] \\ \quad i \quad \mapsto & \begin{cases} i - 1 & \text{si } i \geqslant 2 \\ n & \text{si } i = 1. \end{cases} \end{cases}$$

(a) Montrer que $P_\sigma^n = I_n$.

Une récurrence immédiate montre que $\forall k \in \mathbb{N}, \forall x \in [\![1, n]\!], \underbrace{(\sigma \circ \cdots \circ \sigma)}_{k \textit{ fois}}(x) \equiv x - k \pmod n$.

En particulier, on a $\underbrace{\sigma \circ \cdots \circ \sigma}_{n \textit{ fois}} = \mathrm{id}_{[\![1,n]\!]}$

En utilisant la question 1b (et une autre récurrence), on obtient donc $P_\sigma^n = P_{\sigma \circ \cdots \circ \sigma} = P_{\mathrm{id}_{[\![1,n]\!]}} = I_n$.

(b) Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ et $X \in \mathbb{C}^n$ un vecteur non nul tels que $P_\sigma X = \lambda X$. Montrer que $\lambda \in \mathbb{U}_n$.

On a $P_\sigma^2 X = P_\sigma(\lambda X) = \lambda P_\sigma X = \lambda^2 X$. *Par une récurrence immédiate, on a donc*

$$X = P_\sigma^n X = \lambda^n X \qquad \textit{donc} \qquad (\lambda^n - 1)X = 0.$$

Comme le vecteur X *est non nul, on en déduit* $\lambda^n = 1$, *c'est-à-dire* $\lambda \in \mathbb{U}_n$.

(c) Soit $\lambda \in \mathbb{U}_n$. Montrer que le vecteur $X_\lambda = \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \\ \lambda^2 \\ \vdots \\ \lambda^{n-1} \end{pmatrix}$ vérifie $P_\sigma X_\lambda = \lambda \, X_\lambda$.

On a

$$P_\sigma = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \qquad \textit{donc} \qquad P_\sigma X_\lambda = \begin{pmatrix} \lambda \\ \lambda^2 \\ \lambda^3 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \\ \lambda^2 \\ \vdots \\ \lambda^{n-1} \end{pmatrix} = \lambda X_\lambda.$$

(d) On définit $F = \Big(\omega\big((k-1)(\ell-1)\big)\Big)_{1\leqslant k,\ell\leqslant n} \in M_n(\mathbb{C})$ et $\overline{F}$ la matrice obtenue en remplaçant chaque coefficient de F par son conjugué. On remarquera que, pour tout $\ell \in [\![1,n]\!]$, la ℓ-ième colonne de F est $X_{\omega(\ell-1)}$.

Calculer le produit $F\,\overline{F}$ et en déduire que $F \in GL_n(\mathbb{C})$.

Avant de se lancer dans le calcul, rappelons que si $\lambda \in \mathbb{U}_n \setminus \{1\}$, la formule pour la somme des termes d'une suite géométrique montre que

$$\sum_{x=0}^{n-1} \lambda^x = \frac{1-\lambda^n}{1-\lambda} = 0$$

(et, évidemment, la somme vaut n si $\lambda = 1$).

Soit maintenant $k, \ell \in [\![1,n]\!]$. On a

$$\begin{aligned}
[F\,\overline{F}]_{k,\ell} &= \sum_{j=1}^{n} [F]_{k,j}\overline{[F]_{j,\ell}} \\
&= \sum_{j=1}^{n} \omega\big((k-1)(j-1)\big)\overline{\omega\big((j-1)(\ell-1)\big)} \\
&= \sum_{j=1}^{n} \omega\big((k-1)(j-1)-(j-1)(\ell-1)\big) \\
&= \sum_{j=1}^{n} \omega\big((k-\ell)(j-1)\big) \\
&= \sum_{j=1}^{n} \omega\big(k-\ell\big)^{j-1} \\
&= \sum_{x=0}^{n-1} \omega\big(k-\ell\big)^{x}, && \begin{bmatrix} x = j-1 \\ j = x+1 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

qui vaut donc n si $k = \ell$ et 0 sinon.

Autrement dit, on a $F\,\overline{F} = n\,I_n$, ce qui montre que F est inversible, et que $F^{-1} = \dfrac{1}{n}\overline{F}$.

(e) Montrer que $F^{-1}P_\sigma F = \mathrm{diag}\,\big(\omega(0), \omega(1), \dots, \omega(n-1)\big)$.

Soit $j \in [\![1,n]\!]$. On a $Fe_j = X_{\omega(j-1)}$, ce qui donne également $e_j = F^{-1}X_{\omega(j-1)}$. On a alors

$$\begin{aligned}
\Big(F^{-1}P_\sigma F\Big)\,e_j &= F^{-1}P_\sigma X_{\omega(j-1)} \\
&= \omega(j-1)\,F^{-1}X_{\omega(j-1)} && \textit{(d'après la question 6c)} \\
&= \omega(j-1)\,e_j,
\end{aligned}$$

ce qui montre que la j-ième colonne de $F^{-1}P_\sigma F$ est $\omega(j-1)\,e_j$.

Cela étant valable pour tout $j \in [\![1,n]\!]$, on a $F^{-1}P_\sigma F = \mathrm{diag}\,\big(\omega(0), \omega(1), \dots, \omega(n-1)\big)$.

7. Exprimer la relation de récurrence (⧗) sous la forme $\forall t \in \mathbb{N}, X_{t+1} = AX_t$, où $A \in M_n(\mathbb{R})$ est une matrice que l'on exprimera à l'aide de la matrice P_σ.

Soit $t \in \mathbb{N}$. *On a*

$$X_{t+1} = \begin{pmatrix} \dfrac{x_n(t)+x_2(t)}{2} \\ \dfrac{x_1(t)+x_3(t)}{2} \\ \dfrac{x_2(t)+x_4(t)}{2} \\ \vdots \\ \dfrac{x_{n-1}(t)+x_1(t)}{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix} = \frac{P_\sigma + P_\sigma^T}{2}X_t = \frac{P_\sigma + P_\sigma^{-1}}{2}X_t.$$

En posant $A = \dfrac{P_\sigma + P_\sigma^{-1}}{2}$, *on a donc* $\forall t \in \mathbb{N}, X_{t+1} = AX_t$.

8. En déduire que l'on a $\forall t \in \mathbb{N}, X_t = F\,\mathrm{diag}(\lambda_1^t, \lambda_2^t, \ldots, \lambda_n^t)\,F^{-1}\,X_0$, où $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ sont des nombres réels que l'on précisera.

La relation $\forall t \in \mathbb{N}, X_{t+1} = A\,X_t$ *et une récurrence immédiate montrent* $\forall t \in \mathbb{N}, X_t = A^t\,X_0$.

Il reste simplement à montrer que $\forall t \in \mathbb{N}, A^t = F\,\mathrm{diag}(\lambda_1^t, \lambda_2^t, \ldots, \lambda_n^t)\,F^{-1}$, *pour des réels* $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ *encore à déterminer.*

D'après la question 6e, on a $F^{-1}P_\sigma F = \underbrace{\mathrm{diag}\left(\omega(0), \omega(1), \ldots, \omega(n-1)\right)}_{\Delta}$, *c'est-à-dire* $P_\sigma = F\Delta F^{-1}$.

En passant à l'inverse, $P_\sigma^{-1} = \left(F\Delta F^{-1}\right)^{-1} = F\Delta^{-1}F^{-1}$, *donc*

$$\begin{aligned} A = \frac{P_\sigma + P_\sigma^{-1}}{2} &= \frac{F\Delta F^{-1} + F\Delta^{-1}F^{-1}}{2} \\ &= F\,\frac{\Delta + \Delta^{-1}}{2}\,F^{-1} \\ &= F\,\mathrm{diag}\left(\frac{\omega(0)+\omega(0)^{-1}}{2}, \frac{\omega(1)+\omega(1)^{-1}}{2}, \ldots, \frac{\omega(n-1)+\omega(n-1)^{-1}}{2}\right)F^{-1} \\ &= F\,\mathrm{diag}\left(1, \cos\left(\frac{2\pi}{n}\right), \ldots, \cos\left(\frac{2\pi}{n}(n-1)\right)\right)F^{-1} \\ &= F\,\mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)F^{-1}, \end{aligned}$$

où, pour tout $j \in [\![1, n]\!]$, *on a posé* $\lambda_j = \cos\left(\dfrac{2\pi}{n}(j-1)\right)$.

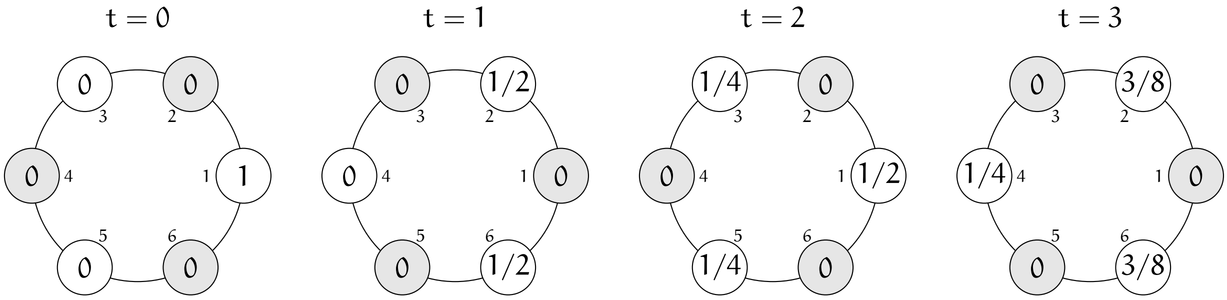
Ainsi, pour tout $t \in \mathbb{N}$, *on a*

$$\begin{aligned} A^t &= \left(F\,\mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)F^{-1}\right)^t \\ &= F\,\mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)^t\,F^{-1} \\ &= F\,\mathrm{diag}\left(\lambda_1^t, \lambda_2^t, \ldots, \lambda_n^t\right)F^{-1}, \end{aligned}$$

ce qui conclut.

9. On suppose n pair. Montrer que la suite $(X_t)_{t\in\mathbb{N}}$ ne converge pas.

Le phénomène problématique (de périodicité) se voit sur des petits cas, comme par exemple ici quand $n = 6$.



Soit $t \in \mathbb{N}$. *On a alors*

$$
\begin{aligned}
\sum_{\substack{k\in[\![1,n]\!]\\ k \text{ pair}}} x_k(t+1) &= x_2(t+1) + x_4(t+1) + x_6(t+1) + \cdots + x_n(t+1)\\
&= \frac{x_1(t)+x_3(t)}{2} + \frac{x_3(t)+x_5(t)}{2} + \frac{x_5(t)+x_7(t)}{2} + \cdots + \frac{x_{n-1}(t)+x_1(t)}{2}\\
&= x_1(t) + x_3(t) + x_5(t) + \cdots + x_{n-1}(t)\\
&= \sum_{\substack{k\in[\![1,n]\!]\\ k \text{ impair}}} x_k(t)
\end{aligned}
$$

et, de même, $\displaystyle\sum_{\substack{k\in[\![1,n]\!]\\ k \text{ impair}}} x_k(t+1) = \sum_{\substack{k\in[\![1,n]\!]\\ k \text{ pair}}} x_k(t)$.

Vu la valeur de X_0, *une récurrence immédiate montre que*

$$
\forall t \in \mathbb{N}, \sum_{\substack{k\in[\![1,n]\!]\\ k \text{ pair}}} x_k(t) = \begin{cases} 0 & \textit{si } t \textit{ pair}\\ 1 & \textit{si } t \textit{ impair.}\end{cases}
$$

Cela montre que la suite $\left(\displaystyle\sum_{\substack{k\in[\![1,n]\!]\\ k \text{ pair}}} x_k(t)\right)_{t\in\mathbb{N}}$ *ne converge pas, d'où l'on tire que* $(X_t)_{t\in\mathbb{N}}$ *ne converge pas.*

10. On suppose n impair.

   (a) Montrer que $X_t \xrightarrow[t\to+\infty]{} \dfrac{1}{n}u$.

   Comme n *est impair, on a* $\lambda = 1$ *et* $\forall j \in [\![2,n]\!]$, $\dfrac{2\pi}{n}(j-1) \not\equiv 0 \pmod{\pi}$, *donc* $\lambda_2, \dots, \lambda_n \in \,]-1,1[$.

   En particulier, $\forall j \in [\![2,n]\!]$, $\lambda_j^t \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$.

   On en déduit $\operatorname{diag}\left(\lambda_1^t, \lambda_2^t, \dots, \lambda_n^t\right) \xrightarrow[t\to+\infty]{} \operatorname{diag}(1, 0, \dots, 0)$.

   Pour terminer le calcul, on remarque $FX_0 = u$, *et que les calculs de la question 6d entraînent que* $F^{-1} = \dfrac{1}{n}\overline{F}$, *donc* $F^{-1}X_0 = \dfrac{1}{n}\overline{F}X_0 = \dfrac{1}{n}u$.

On a alors

$$X_t = F\ \mathrm{diag}(\lambda_1^t, \lambda_2^t, \dots, \lambda_n^t)\, F^{-1}\, X_0 \xrightarrow[t\to+\infty]{} F\ \mathrm{diag}(1, 0, \dots, 0) F^{-1} X_0$$
$$= \frac{1}{n} F\,\mathrm{diag}(1, 0, \dots, 0) u = \frac{1}{n} F\, X_0 = \frac{1}{n} u.$$

(b) Montrer que $\forall t \in \mathbb{N}$, $\left\| X_t - \dfrac{1}{n} u \right\|_\infty \leqslant \cos\left(\dfrac{\pi}{n}\right)^t$.

Pour tout $j \in [\![2, n]\!]$*, on a* $j - 1 \in [\![1, n-1]\!]$.

- *Si* $j - 1 \in [\![1, (n-1)/2]\!]$*, on a* $\dfrac{2\pi}{n}(j-1) \in \left[\dfrac{2\pi}{n}, \dfrac{\pi}{n}(n-1)\right] = \left[\dfrac{2\pi}{n}, \pi - \dfrac{\pi}{n}\right]$*, donc*

$$\lambda_j = \cos\left(\frac{2\pi}{n}(j-1)\right) \in \left[\cos\left(\pi - \frac{\pi}{n}\right), \cos\left(\frac{2\pi}{n}\right)\right] = \left[-\cos\left(\frac{\pi}{n}\right), \cos\left(\frac{2\pi}{n}\right)\right],$$

  ce qui entraîne $|\lambda_j| \leqslant \cos\left(\dfrac{\pi}{n}\right)$.
- *Par parité de cosinus, la même inégalité est valable si* $j - 1 \in [\![(n+1)/2, n-1]\!]$.

Remarquons que si $M \in M_n(\mathbb{C})$ *et* $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^n$*, on a, pour tout* $k \in [\![1, n]\!]$,

$$\begin{aligned} |[MY]_{k,1}| &= \left| \sum_{\ell=1}^{n} [M]_{k,\ell}\, y_k \right| \\ &\leqslant \left(\sum_{\ell=1}^{n} |[M]_{k,\ell}| \right) \|Y\|_\infty, \\ \text{donc} \qquad \|MY\|_\infty &\leqslant |||M|||\ \|Y\|_\infty, \end{aligned}$$

où l'on a défini, pour tout $M \in M_n(\mathbb{C})$, $|||M||| = \max\limits_{k=1}^{n} \sum\limits_{\ell=1}^{n} |[M]_{k,\ell}|$.

Comme en outre $\left\| F^{-1} X_0 \right\|_\infty = \left\| \dfrac{1}{n} u \right\|_\infty = \dfrac{1}{n}$*, on a bien, pour tout* $t \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} \left\| X_t - \frac{1}{n} u \right\|_\infty &= \left\| F\ \mathrm{diag}(1, \lambda_2^t, \dots, \lambda_n^t)\, F^{-1}\, X_0 - F\ \mathrm{diag}(1, 0, \dots, 0) F^{-1} X_0 \right\|_\infty \\ &= \left\| F\ \mathrm{diag}(0, \lambda_2^t, \dots, \lambda_n^t)\, F^{-1}\, X_0 \right\|_\infty \\ &\leqslant |||F|||\ |||\,\mathrm{diag}(0, \lambda_2^t, \dots, \lambda_n^t)|||\ \left\| F^{-1} X_0 \right\|_\infty \\ &\leqslant n \max_{j=2}^{n} \left(|\lambda_j^t| \right) \frac{1}{n} \\ &\leqslant \left(\max_{j=2}^{n} (|\lambda_j|) \right)^t \\ &\leqslant \cos\left(\frac{\pi}{n}\right)^t. \end{aligned}$$