Cinquième composition de mathématiques

Durée : *4 heures.*

Toute sortie est interdite pendant les dix dernières minutes.

Les documents, calculatrices, etc. sont ***interdits****.*

Consignes générales de présentation

La présentation de la copie est prise en compte dans l'évaluation.

- *Ne composez pas sur la première page, ce qui me permettra d'écrire mes commentaires.*
- *Merci* $\boxed{\textit{d'encadrer}}$ *ou de* <u>*souligner*</u> *vos résultats.*
- *Numérotez vos copies doubles, et rendez-les dans l'ordre, la première servant de chemise pour les suivantes, qui ne seront pas imbriquées les unes dans les autres.*
- *Les parties trop difficiles à lire de votre copie ne seront pas lues.*

Exercice 1

On fixe dans cet exercice $\rho \in \mathbb{R}$. On considère alors une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$u_0 = 0, \qquad u_1 = 1 \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = (1+\rho)u_{n+1} - \rho\, u_n.$$

1. Déterminer, en fonction de ρ, une expression simple de la suite u.
2. Pour quelles valeurs de ρ a-t-on $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geqslant 0$?

Exercice 2

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{2n+1} \frac{1}{\sqrt{n^2+k}}$. Montrer que $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et déterminer sa limite.

Exercice 3

1. Soit v une suite réelle vérifiant $v_0 > 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} = \sqrt{v_n}$.
   (a) Montrer que la suite v est à valeurs strictement positives.
   (b) Déterminer une expression de $\big(\ln(v_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$. Qu'en déduit-on sur v_n quand $n \to +\infty$?

Dans la suite de l'exercice, on fixe une suite réelle u vérifiant $u_0 > 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sqrt{u_n} + \dfrac{1}{n+1}$.

2. Montrer qu'à partir d'un certain rang, la suite u est à valeurs dans $[1, +\infty[$.
3. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que si $u_{n+1} \leqslant u_n$, alors $u_{n+2} \leqslant u_{n+1}$.
4. Montrer que la suite u est monotone à partir d'un certain rang.
5. Montrer que la suite u converge, et déterminer sa limite.

Exercice 4

On note $\Delta = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}_+^2 \,\middle|\, 1 \leqslant x^2+y^2 < 2\right\}$ et $A = \left\{xy \,\middle|\, (x,y) \in \Delta\right\}$.

1. Dessiner Δ.
2. Montrer que A possède une borne supérieure et une borne inférieure, et les déterminer.

Exercice 5

On dira dans cet exercice qu'une suite $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ est *pseudo-décroissante* si

$$\forall n \in \mathbb{N}, \exists N \in \mathbb{N} : \forall p \geqslant N, u_p \leqslant u_n.$$

1. Soit $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ une suite à valeurs > 0 telle que $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Montrer que u est pseudo-décroissante.
2. Soit $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ une suite pseudo-décroissante et minorée. Montrer que u converge.

Problème. Matrices bistochastiques.

Dans tout le problème, $n \geqslant 3$ désigne un entier.

- On rappelle qu'étant donné $M \in M_{n,p}(\mathbb{C})$ et $j \in [\![1,p]\!]$, la notation $C_j(M)$ désigne la j-ième colonne de M, vue comme vecteur de $\mathbb{C}^n$.
- Étant donné $M \in M_n(\mathbb{R})$, on notera $M \geqslant 0$ si $\forall i,j \in [\![1,n]\!], [M]_{i,j} \geqslant 0$.
- Une matrice $M \in M_n(\mathbb{R})$ est dite *bistochastique* si tous ses éléments sont $\geqslant 0$, et si la somme des éléments de chacune de ses lignes et de chacune de ses colonnes vaut 1. On note alors

$$\mathscr{B}_n = \left\{ M \in M_n(\mathbb{R}) \,\middle|\, M \geqslant 0 \text{ et } \forall k \in [\![1,n]\!], \sum_{\ell=1}^{n} [M]_{k,\ell} = \sum_{\ell=1}^{n} [M]_{\ell,k} = 1 \right\}$$

  l'ensemble de ces matrices.
- On note Σ_n l'ensemble des bijections $\sigma : [\![1,n]\!] \to [\![1,n]\!]$.
  Pour tout $\sigma \in \Sigma_n$, on note P_σ et on appelle *matrice de permutation associée à* σ la matrice carrée d'ordre n dont le coefficient (i,j) vaut 1 si $i = \sigma(j)$, et 0 sinon. Ainsi, $P_\sigma = \left(\mathbb{1}_{(i=\sigma(j))}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$.
  Il s'agit donc des matrices possédant exactement un coefficient non nul sur chaque ligne, et sur chaque colonne, valant 1. Par exemple, il y a six matrices de permutation dans $M_3(\mathbb{C})$, à savoir :

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}.$$

- On note $e_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\\vdots\\0\end{pmatrix}, \dots, e_n = \begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\1\end{pmatrix}$ les vecteurs de la base canonique.
- On note également $u = e_1 + \cdots + e_n$ le vecteur dont tous les coefficients valent 1.
- Étant donné un vecteur $X = \begin{pmatrix}x_1\\\vdots\\x_n\end{pmatrix} \in \mathbb{C}^n$, on note enfin $\|X\|_\infty = \max\left(|x_1|, \dots, |x_n|\right)$.

Partie I. Généralités.

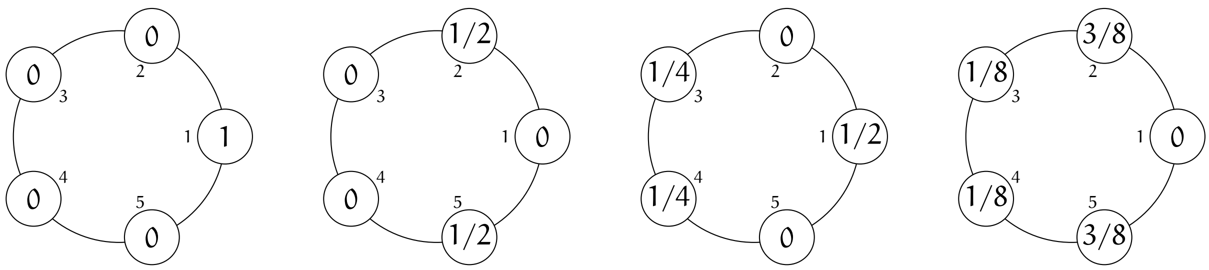
1. **Matrices de permutation.**
   (a) Soit $\sigma \in \Sigma_n$ et $j \in [\![1,n]\!]$. Montrer $P_\sigma e_j = e_{\sigma(j)}$.
   (b) Soit $\sigma, \tau \in \Sigma_n$. Montrer $P_\sigma P_\tau = P_{\sigma\circ\tau}$.
   (c) Soit $\sigma \in \Sigma_n$. Montrer que P_σ est inversible et que $P_\sigma^{-1} = P_\sigma^T$.
2. **Une première caractérisation des matrices bistochastiques.**
   (a) Soit $M \in M_n(\mathbb{R})$. Montrer que $M \in \mathscr{B}_n$ si et seulement si $M \geqslant 0$ et $Mu = M^T u = u$.
   (b) En déduire que $\mathscr{B}_n$ est stable par produit, c'est-à-dire que $\forall M, N \in \mathscr{B}_n, MN \in \mathscr{B}_n$.
3. Donner un exemple de matrice non inversible appartenant à $\mathscr{B}_n$.

4. **Matrices bistochastiques inversibles.** Soit $M \in \mathscr{B}_n \cap GL_n(\mathbb{R})$.
   (a) Montrer que $M^{-1} \in \mathscr{B}_n$ si et seulement si $M^{-1} \geqslant 0$.
   (b) Supposons $M^{-1} \in \mathscr{B}_n$. On va montrer qu'alors M est une matrice de permutation.
      i. En utilisant l'égalité $M^{-1}M = I_n$, montrer
      $$\forall i, j \in [\![1, n]\!], [M]_{i,j} \neq 0 \Rightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R} : C_i(M^{-1}) = \lambda e_j.$$
      ii. En déduire que, pour tout $j \in [\![1, n]\!]$, il existe un unique $i \in [\![1, n]\!]$ tel que $[M]_{i,j} \neq 0$, et qu'on a alors $[M]_{i,j} = 1$.
      iii. La question précédente montre que l'on peut trouver une fonction $\sigma : [\![1, n]\!] \to [\![1, n]\!]$ telle que $\forall i, j \in [\![1, n]\!], [M]_{i,j} = \mathbb{1}_{(i=\sigma(j))}$. Montrer $\sigma \in \Sigma_n$, c'est-à-dire que σ est bijective.
5. **Propriétés spectrales des matrices bistochastiques.** Soit $M \in \mathscr{B}_n$.
   (a) Montrer que $M - I_n$ n'est pas inversible.
   (b) Montrer $\forall X \in \mathbb{C}^n, \|MX\|_\infty \leqslant \|X\|_\infty$.
   (c) En déduire que pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$ de module > 1, la matrice $M - \lambda I_n$ est inversible.

Partie II. Un processus de diffusion.

On modélise (grossièrement) la diffusion de la chaleur dans un matériau homogène de forme circulaire. Pour simplifier, on discrétise à la fois le matériau et le temps, si bien que l'état du système au temps $t = 0, 1, 2, 3, \dots$ est simplement donné par n températures différentes $x_1(t), \dots, x_n(t)$.
À chaque étape, la température en un point est remplacée par la moyenne des températures de ses deux voisins à l'étape précédente. Voici par exemple le début du processus dans le cas $n = 5$.

$t = 0$ $\quad$ $t = 1$ $\quad$ $t = 2$ $\quad$ $t = 3$



$$X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad X_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1/2 \\ 0 \\ 0 \\ 1/2 \end{pmatrix} \qquad X_2 = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \\ 1/4 \\ 1/4 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad X_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3/8 \\ 1/8 \\ 1/8 \\ 3/8 \end{pmatrix}$$

Plus formellement, on définit une suite de vecteurs $(X_t)_{t\in\mathbb{N}} = \left(\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}\right)_{t\in\mathbb{N}}$ de $\mathbb{R}^n$ en posant

$$\forall i \in [\![1, n]\!], x_i(0) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = 1 \\ 0 & \text{si } i \geqslant 2 \end{cases}$$

$$\text{et} \qquad \forall t \in \mathbb{N}, \forall i \in [\![1, n]\!], x_i(t+1) = \begin{cases} \dfrac{x_{i-1}(t) + x_{i+1}(t)}{2} & \text{si } 2 \leqslant i \leqslant n-1 \\ \dfrac{x_n(t) + x_2(t)}{2} & \text{si } i = 1 \\ \dfrac{x_{n-1}(t) + x_1(t)}{2} & \text{si } i = n. \end{cases} \qquad (\text{⌛})$$

6. **Diagonalisation d'une matrice de permutation.** On définit un élément $\sigma \in \Sigma_n$ par :

$$\sigma : \begin{cases} [\![1, n]\!] & \longrightarrow \quad [\![1, n]\!] \\ \quad i & \longmapsto \begin{cases} i - 1 & \text{si } i \geqslant 2 \\ n & \text{si } i = 1. \end{cases} \end{cases}$$

   (a) Montrer que $P_\sigma^n = I_n$.

   (b) Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ et $X \in \mathbb{C}^n$ un vecteur non nul tels que $P_\sigma X = \lambda X$. Montrer que $\lambda \in \mathbb{U}_n$.

   (c) Soit $\lambda \in \mathbb{U}_n$. Montrer que le vecteur $X_\lambda = \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \\ \lambda^2 \\ \vdots \\ \lambda^{n-1} \end{pmatrix}$ vérifie $P_\sigma X_\lambda = \lambda\, X_\lambda$.

> Pour tout $k \in \mathbb{Z}$, on note $\omega(k) = \exp\left(i\dfrac{2\pi}{n}k\right)$.

   (d) On définit $F = \Big(\omega\big((k-1)(\ell-1)\big)\Big)_{1 \leqslant k, \ell \leqslant n} \in M_n(\mathbb{C})$ et $\overline{F}$ la matrice obtenue en remplaçant chaque coefficient de F par son conjugué. On remarquera que, pour tout $\ell \in [\![1, n]\!]$, la ℓ-ième colonne de F est $X_{\omega(\ell-1)}$.

   Calculer le produit $F\,\overline{F}$ et en déduire que $F \in GL_n(\mathbb{C})$.

   (e) Montrer que $F^{-1}P_\sigma F = \operatorname{diag}\big(\omega(0), \omega(1), \ldots, \omega(n-1)\big)$.

7. Exprimer la relation de récurrence (⌛) sous la forme $\forall t \in \mathbb{N}, X_{t+1} = AX_t$, où $A \in M_n(\mathbb{R})$ est une matrice que l'on exprimera à l'aide de la matrice P_σ.
8. En déduire que l'on a $\forall t \in \mathbb{N}, X_t = F \operatorname{diag}(\lambda_1^t, \lambda_2^t, \ldots, \lambda_n^t)\, F^{-1}\, X_0$, où $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ sont des nombres réels que l'on précisera.

La suite de cette partie parle de convergence de suites de matrices (colonnes ou carrées).

Une suite de matrices $(M_t)_{t\in\mathbb{N}}$ converge vers M si et seulement si, pour tous indices i et j, le coefficient (i, j) de M_t converge vers celui de M quand t tend vers $+\infty$.

On n'hésitera pas à utiliser les résultats habituels sur la convergence dans ce contexte. Notamment, si $(M_t)_{t\in\mathbb{N}}$ et $(N_t)_{t\in\mathbb{N}}$ sont deux suites de matrices convergeant vers M et N respectivement, alors $M_t\, N_t \xrightarrow[t\to+\infty]{} M\,N$.

9. On suppose n pair. Montrer que la suite $(X_t)_{t\in\mathbb{N}}$ ne converge pas.
10. On suppose n impair.

   (a) Montrer que $X_t \xrightarrow[t\to+\infty]{} \dfrac{1}{n}u$.

   (b) Montrer que $\forall t \in \mathbb{N}, \left\| X_t - \dfrac{1}{n}u \right\|_\infty \leqslant \cos\left(\dfrac{\pi}{n}\right)^t$.