

Sixième composition de mathématiques [corrigé]

Exercice 1

On compte dans cet exercice des nombres à quatre chiffres, de 0000 à 9999 (il y a donc 10 000 nombres au total).

1. Combien de ces nombres possèdent quatre chiffres différents ?

C'est une question de cours : il s'agit de mots de longueur 4 sur « l'alphabet » $\llbracket 0, 9 \rrbracket$ sans répétition, il y en a $10 \times 9 \times 8 \times 7 = 5040$.

2. Combien de ces nombres possèdent (au moins) un chiffre 5 mais pas de chiffre 8 ?

- Il y a $9^4 = 6561$ nombres ne possédant pas le chiffre 8 (ce sont des mots de longueur 4 sur « l'alphabet » $\llbracket 0, 9 \rrbracket \setminus \{8\}$)...
- parmi lesquels $8^4 = 2^{12} = 4096$ nombres ne possédant ni le chiffre 8, ni le chiffre 5.

Par principe de soustraction, il y a donc $6561 - 4096 = 2465$ nombres possédant un chiffre 5 mais pas de chiffre 8.

3. Combien de ces nombres sont divisibles par 7 ?

Allons-y prudemment pour ne pas commettre une erreur off-by-one.

Entre 1 et un multiple de 7. Il y a :

- un multiple de 7 entre 1 et 7 (à savoir 7),
- un multiple de 7 entre 8 et 14 (à savoir 14), etc.
- etc.
- un multiple de 7 entre 771 et 777 (à savoir 777),
- etc.

Ainsi, si $n = 7k$, il y a $k = \frac{n}{7}$ multiples de 7 dans l'intervalle $\llbracket 1, n \rrbracket$.

Entre 1 et un entier quelconque. Dans le cas général, l'intervalle $\llbracket 1, n \rrbracket$ se découpe en $\left\lfloor \frac{n}{7} \right\rfloor$ paquets de 7 (des « semaines » ?) se terminant chacun par un multiple de 7, puis un reliquat (éventuellement vide) ne contenant pas de multiple de 7 (puisque le multiple de 7 est toujours le dernier nombre du paquet, celui qui le complète).

En général, il y a donc $\left\lfloor \frac{n}{7} \right\rfloor$ multiples de 7 dans l'intervalle $\llbracket 1, n \rrbracket$.

On réintègre 0. On rajoute 0, multiple de 7 : il y a $1 + \left\lfloor \frac{n}{7} \right\rfloor$ multiples de 7 dans l'intervalle $\llbracket 0, n \rrbracket$.

On peut d'ailleurs démontrer cette formule par récurrence septuple si le cœur nous en dit.

Dans notre cas, le nombre cherché est donc $1 + \left\lfloor \frac{9999}{7} \right\rfloor = 1429$, car on obtient $9999 = 7 \times 1428 + 3$ en posant la division.

4. Combien de ces nombres sont constitués de quatre chiffres consécutifs, disposés dans un certain ordre (comme par exemple 4235) ?

Pour construire un tel nombre :

- on choisit le plus petit des quatre chiffres consécutifs : il y a 7 possibilités, de 0 à 6 (correspondant aux chiffres maximaux 6, 7, 8, 9) ;
- on choisit une permutation de ces quatre chiffres : il y a $4! = 24$ possibilités.

Par principe de multiplication, il y a $7 \times 24 = 168$ tels nombres.

5. Combien de ces nombres ont des chiffres dont la somme vaut 11 ?

On pourrait s'écrier bars and stars! un peu vite... Il y a en effet

$$\binom{11+3}{3} = \frac{14 \times 13 \times 12}{6} = 14 \times 13 \times 2 = \underbrace{14 \times 26 = (20-6)(20+6) = 400 - 36}_{\heartsuit\heartsuit\heartsuit} = 364$$

façons de répartir 11 « points » en quatre parts.

Mais toutes ces façons ne correspondent pas à des nombres : il faut enlever les répartitions (en langage technique, les compositions) dont l'une des parts est 10 ou 11, qui ne sont pas des chiffres.

- Les répartitions contenant un 10 sont des anagrammes de (10, 1, 0, 0) : il y a quatre possibilités pour placer le 10, puis trois pour placer le 1 (et les 0 prennent les deux places restantes), d'où 12 répartitions.
- Les répartitions contenant un 11 sont des anagrammes de (11, 0, 0, 0) : il y en a 4 (on place le 11).

Par principe de soustraction, le nombre cherché est $364 - 12 - 4 = 348$.

Exercice 2. Inégalité de Fisher (1940).

Soit $n, p \in \mathbb{N}^*$.

1. On suppose dans cette question $p > n$, et on considère une matrice $M \in M_{n,p}(\mathbb{R})$, que l'on écrit par blocs avec un premier bloc carré : $M = \begin{pmatrix} U & H \end{pmatrix}$, où $U \in M_n(\mathbb{R})$ et $H \in M_{n,p-n}(\mathbb{R})$.

- (a) Soit $X \in \mathbb{R}^n$ et $Y \in \mathbb{R}^{p-n}$. Calculer le produit par blocs $M \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$.

On trouve $UX + HY$, qui est un vecteur de $\mathbb{R}^n$.

- (b) On suppose U inversible.

Montrer que pour tout $Y \in \mathbb{R}^{p-n}$, il existe $X \in \mathbb{R}^n$ tel que $M \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = 0_{\mathbb{R}^n}$.

Soit $Y \in \mathbb{R}^{p-n}$. Si l'on fixe $X = -U^{-1}HY \in \mathbb{R}^n$, on a

$$M \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = UX + HY = -UU^{-1}HY + HY = -HY + HY = 0_{\mathbb{R}^n}.$$

(c) Montrer que, dans tous les cas, $\ker M \neq \{0_{\mathbb{R}^p}\}$.

On va construire un vecteur non nul dans le noyau de M en distinguant deux cas.

► Si U est inversible, on peut appliquer la question précédente à $Y = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{p-n}$ (à vrai dire, n'importe quel vecteur non nul ferait l'affaire). On obtient ainsi un vecteur $X \in \mathbb{R}^n$ tel que $Z = \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^p$ appartienne au noyau de M .

Comme ce vecteur Z est non nul (avec mon choix de Y , son dernier coefficient vaut 1), on a fini.

► Si U n'est pas inversible, on peut trouver d'après le critère nucléaire un vecteur $X \in \mathbb{R}^n$ non nul dans le noyau de U . Le vecteur $Z = \begin{pmatrix} X \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^p$ est alors dans le noyau de M , et il n'est manifestement pas nul.

2. Soit $M \in M_{n,p}(\mathbb{R})$ telle que $M^T M \in GL_p(\mathbb{R})$. Montrer que $p \leq n$.

On procède par contraposée : on suppose $p > n$ et on va montrer que $M^T M$ n'est pas inversible.

D'après la question précédente, on peut trouver $Z \in \mathbb{R}^p$ non nul dans le noyau de M . On a donc $MZ = 0_{\mathbb{R}^n}$, puis $M^T MZ = 0_{\mathbb{R}^p}$ en multipliant à gauche par M^T .

La matrice $M^T M$ possède un noyau non trivial donc elle n'est pas inversible.

3. Une classe de matrices inversibles. Soit $\lambda_1, \dots, \lambda_p \in \mathbb{R}$ et $A = \begin{pmatrix} 1 + \lambda_1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 + \lambda_2 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 + \lambda_p \end{pmatrix}$.

(a) Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} \in \ker A$. Montrer que $\sum_{k=1}^p \lambda_k x_k^2 + \left(\sum_{k=1}^p x_k \right)^2 = 0$.

Suivant l'indication, on calcule $X^T A X$ (qui est évidemment nul, puisque $X \in \ker A$). Notons qu'il s'agit d'une matrice 1×1 , c'est-à-dire d'un scalaire qui se prend pour une matrice. On a alors

$$\begin{aligned} [X^T A X]_{\bullet, \bullet} &= \sum_{k=1}^p \sum_{\ell=1}^p [X^T]_{\bullet, k} [A]_{k, \ell} [X]_{\ell, \bullet} = \sum_{k=1}^p \sum_{\ell=1}^p x_k \underbrace{[A]_{k, \ell}}_{=1+\lambda_k \mathbb{1}_{(k=\ell)}} x_\ell \\ &= \sum_{k=1}^p \sum_{\ell=1}^p x_k x_\ell + \sum_{k=1}^p \sum_{\ell=1}^p \mathbb{1}_{(k=\ell)} \lambda_k x_k x_\ell \\ &= \left(\sum_{k=1}^p x_k \right) \left(\sum_{\ell=1}^p x_\ell \right) + \sum_{k=1}^p \lambda_k x_k^2 \\ &= \left(\sum_{k=1}^p x_k \right)^2 + \sum_{k=1}^p \lambda_k x_k^2. \end{aligned}$$

(b) En déduire que, si les réels $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ sont strictement positifs, alors A est inversible.

Supposons $\lambda_1, \dots, \lambda_p > 0$. Montrons que A est inversible en utilisant le critère nucléaire.

Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} \in \ker A$. D'après la question précédente, on a

$$0 = \left(\sum_{k=1}^p x_k \right)^2 + \sum_{k=1}^p \lambda_k x_k^2.$$

Comme il s'agit d'une somme de nombres positifs, on en déduit que tous les termes sont nuls, c'est-à-dire que

$$\sum_{k=1}^p x_k = 0 \quad \text{et} \quad \forall k \in \llbracket 1, p \rrbracket, \lambda_k x_k^2 = 0.$$

Pour tout $k \in \llbracket 1, p \rrbracket$, on obtient alors $x_k^2 = 0$ en divisant par $\lambda_k (\neq 0)$, puis $x_k = 0$.

Cela montre $X = 0_{\mathbb{R}^p}$, et conclut.

4. On considère dans cette dernière question un entier $t \in \mathbb{N}^*$ et des parties $C_1, \dots, C_p$ de l'ensemble $\llbracket 1, n \rrbracket$ vérifiant les conditions suivantes :

- toutes les parties considérées possèdent strictement plus de t éléments : $\forall j \in \llbracket 1, p \rrbracket, |C_j| > t$;
- deux parties possèdent exactement t éléments en commun : $\forall j \neq k \in \llbracket 1, p \rrbracket, |C_j \cap C_k| = t$.

On définit alors la *matrice d'incidence* associée à ces parties : $M = (\mathbb{1}_{(i \in C_j)})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} \in M_{n,p}(\mathbb{R})$. En français, le coefficient (i, j) de la matrice M vaut 1 si l'entier i appartient à la partie C_j , et 0 sinon.

Calculer la matrice $M^T M$ et en déduire l'inégalité de Fisher : $p \leq n$.

On calcule ! Pour tous $j, k \in \llbracket 1, p \rrbracket$, on a

$$[M^T M]_{j,k} = \sum_{i=1}^n [M^T]_{j,i} [M]_{i,k} = \sum_{i=1}^n \mathbb{1}_{(i \in C_j)} \mathbb{1}_{(i \in C_k)}.$$

À $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ fixé, le terme $\mathbb{1}_{(i \in C_j)} \mathbb{1}_{(i \in C_k)}$ vaut 1 si i appartient à la fois à C_j et C_k , et 0 sinon. La somme compte donc simplement le nombre de points contenus à la fois dans C_j et C_k .

Autrement dit, $[M^T M]_{j,k} = |C_j \cap C_k|$.

Pour tout $j \in \llbracket 1, p \rrbracket$, le cardinal $|C_j| = |C_j \cap C_j|$ est $> t$, donc on va le noter $t + \delta_j$, pour un certain réel $\delta_j > 0$. On a ainsi obtenu

$$M^T M = \begin{pmatrix} t + \delta_1 & t & \cdots & t \\ t & t + \delta_2 & \cdots & t \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ t & t & \cdots & t + \delta_p \end{pmatrix}$$

- Si $t = 0$, cette matrice est $\text{diag}(\delta_1, \dots, \delta_p)$, diagonale à coefficients non nuls. Elle est donc inversible.

- Si $t > 0$, cette matrice s'écrit sous forme factorisée $t \begin{pmatrix} 1 + \lambda_1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 + \lambda_2 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 + \lambda_p \end{pmatrix}$, en notant,

pour tout j , $\lambda_j = \frac{\delta_j}{t} (> 0)$. Elle est donc inversible d'après la question précédente.

La matrice $M^T M$ est donc inversible, ce qui montre $p \leq n$: il ne peut pas y avoir plus de parties que de points.

Problème A. Équation fonctionnelle de Hardy (1907).

Dans ce problème, I désignera soit l'intervalle semi-ouvert $[0, 1[$, soit le segment $[0, 1]$. L'objectif est de déterminer s'il existe des fonctions $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ continues telles que

$$\forall x \in I, f(x) = x - f(x^2). \quad (H)$$

1. Soit f une fonction continue vérifiant (H).

(a) Montrer $f(0) = 0$.

En appliquant (H) à $x = 0$, on obtient $f(0) = 0 - f(0)$, donc $2f(0) = 0$, ce qui conclut.

(b) On suppose $I = [0, 1]$. Calculer $f(1)$.

De même, en appliquant (H) à $x = 1$, on obtient $f(1) = 1 - f(1)$, donc $2f(1) = 1$ et $f(1) = \frac{1}{2}$.

2. Unicité.

(a) Soit $h \in C^0(I)$ telle que $\forall x \in I, h(x) = -h(x^2)$. Montrer que $\forall x \in [0, 1[, h(x) = h(0)$.

Soit $x \in [0, 1[$.

En appliquant la relation à x , on obtient $h(x^2) = -h(x)$.

En réappliquant la relation à x^2 , on obtient $h(x^4) = -h(x^2)$, donc $h(x^4) = h(x)$.

Par une récurrence immédiate, on montre alors $\forall n \in \mathbb{N}, h(x^{2^n}) = (-1)^n h(x)$.

En particulier, $\forall n \in \mathbb{N}, h(x^{2^{2n}}) = h(x)$.

Or, $x^{2^{2n}} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$: c'est évident si $x = 0$, et provient de $x^{2^{2n}} = \exp(2^{2n} \underbrace{\ln x}_{<0})$ quand $x > 0$. Par

continuité de h en 0, on en déduit $h(x^{2^{2n}}) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} h(0)$.

Mais, de l'autre côté, on a vu que $(h(x^{2^{2n}}))_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite constante, de valeur $h(x)$. Elle converge donc vers $h(x)$.

Par unicité de la limite, cela montre $h(x) = h(0)$.

(b) Soit $f, g \in C^0(I)$ vérifiant (H). Montrer $f = g$.

► *Commençons par montrer (sans choisir entre les deux I possibles) que f et g coïncident sur l'intervalle semi-ouvert $[0, 1[$.*

On pose $h = f - g$. C'est une fonction continue (par opérations) et, pour tout $x \in [0, 1[$, $h(x) = (x - f(x^2)) - (x - g(x^2)) = g(x^2) - f(x^2) = -h(x^2)$.

D'après la question précédente, la fonction h est nulle sur $[0, 1[$, c'est-à-dire que f et g coïncident sur cet intervalle.

► *Si $I = [0, 1]$, on a vu que $f(1) = \frac{1}{2} = g(1)$.*

On a donc montré dans tous les cas $\forall x \in I, f(x) = g(x)$, ce qui conclut.

Partie I. Cas semi-ouvert $I = [0, 1[$: existence.

Dans toute cette partie, on considère le cas $I = [0, 1[$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $P_n = \sum_{k=0}^n (-1)^k X^{2^k}$.

3. Soit $x \in [0, 1[$.

(a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer $P_{2n-1}(x) \leq P_{2n+1}(x) \leq P_{2n+2}(x) \leq P_{2n}(x)$.

On calcule le signe de toutes les différences, successivement. On va obtenir deux fois sur trois une différence de la forme $x^p - x^q$, avec $q > p$. Comme $x \in [0, 1[$, on a $x^q \leq x^p$ et la différence est positive. Spécifiquement :

- $P_{2n+1}(x) - P_{2n-1}(x) = x^{2^{2n}} - x^{2^{2n+1}} \geq 0$;
- $P_{2n+2}(x) - P_{2n+1}(x) = x^{2^{2n+2}} \geq 0$;
- $P_{2n}(x) - P_{2n+2}(x) = x^{2^{2n+1}} - x^{2^{2n+2}} \geq 0$.

(b) Montrer que la suite $(P_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ converge.

- Les inégalités de la question précédente montrent que la suite $(P_{2n}(x))_{n \in \mathbb{N}}$ décroît et que la suite $(P_{2n+1}(x))_{n \in \mathbb{N}}$ croît.
- Par ailleurs, $P_{2n}(x) - P_{2n+1}(x) = x^{2^{2n+1}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, car $x \in [0, 1[$ et $2^{2n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$.

Les deux suites sont donc adjacentes, et convergent ainsi vers la même limite.

Comme ses sous-suites de rang pair et de rang impair convergent vers la même limite, la suite $(P_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ converge.

On notera $\varphi(x)$ la limite de cette suite, ce qui définit une fonction $\varphi : [0, 1[\rightarrow \mathbb{R}$.

Par construction, on a donc $\forall x \in [0, 1[, P_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \varphi(x)$.

4. Soit $x \in [0, 1[$. Montrer $\forall n \in \mathbb{N}^*, P_{n+1}(x) = x - P_n(x^2)$ et en déduire que φ vérifie (H).

► Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a

$$P_{n+1}(x) = \sum_{k=1}^{n+1} (-1)^k x^{2^k} = x + \sum_{k=2}^{n+1} (-1)^k x^{2^k} = x + \sum_{\ell=1}^n (-1)^{\ell+1} x^{2^{\ell+1}} = x - \sum_{\ell=1}^n (-1)^\ell (x^2)^{2^\ell} = x - P_n(x^2).$$

► Comme $\forall t \in [0, 1[, P_n(t) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \varphi(t)$, on a (après un décalage innocent) $P_{n+1}(x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \varphi(x)$ et $P_n(x^2) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \varphi(x^2)$.

En passant à la limite dans l'égalité précédente (c'est-à-dire par unicité de la limite), on obtient $\varphi(x) = x - \varphi(x^2)$, c'est-à-dire que φ vérifie (H).

Dans les questions suivantes, on considère, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, la fonction $g_p : x \mapsto \sum_{k=1}^p k x^{k-1}$.

5. Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Exprimer g_p comme la dérivée d'une fonction encore plus simple, et en déduire son expression.

La fonction g_p est (par linéarité de la dérivation), la dérivée de $x \mapsto \sum_{k=1}^p x^k$. En rajoutant une constante,

on va même dire qu'il s'agit de la dérivée de $G_p : x \mapsto \sum_{k=0}^p x^k$.

Or, pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$, $G_p(x) = \frac{1 - x^{p+1}}{1 - x}$.

Fixons $a \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$. Les fonctions G_p et $x \mapsto \frac{1 - x^{p+1}}{1 - x}$ coïncident sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$, qui est un voisinage de a , donc elles ont la même dérivée en ce point. Ainsi,

$$g_p(a) = G'_p(a) = \frac{-(p+1)a^p + (p+1)a^{p+1} + 1 - a^{p+1}}{(1-a)^2} = \frac{p a^{p+1} - (p+1)a^p + 1}{(1-a)^2}.$$

In fine,

$$\forall x \in \mathbb{R}, g_p(x) = \begin{cases} \frac{p x^{p+1} - (p+1)x^p + 1}{(1-x)^2} & \text{si } x \neq 1 \\ \sum_{k=1}^p k = \frac{p(p+1)}{2} & \text{si } x = 1. \end{cases}$$

6. Soit $a \in [0, 1[$.

(a) Montrer $p a^p \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} 0$.

La convergence est évidente si $a = 0$, donc on suppose dans la suite $a \in]0, 1[$.

On a alors $p \ln(a) + \ln(p) \underset{p \rightarrow +\infty}{\sim} p \ln(a) \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} -\infty$, car $\ln(a) < 0$ et par croissances comparées, donc

$$p a^p = \exp(p \ln(a) + \ln(p)) \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} 0$$

par composition des limites.

(b) Montrer $\forall p \in \mathbb{N}^*, g_p(a) \leq M_a$, où $M_a = (1-a)^{-2}$.

Par opérations, $(p+1)a^p \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} 0$ et $p a^{p+1} \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} 0$, donc

$$g_p(a) = \frac{p a^{p+1} - (p+1)a^p + 1}{(1-a)^2} \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} \frac{1}{(1-a)^2} = M_a.$$

Comme l'expression originale de la suite $(g_p(a))_{p \in \mathbb{N}^*}$ (comme somme de termes positifs) rendait clair qu'il s'agissait d'une suite croissante, le théorème de la limite monotone garantit que la limite majore les valeurs : $\forall p \in \mathbb{N}^*, g_p(a) \leq M_a$.

7. Soit $a \in]0, 1[$ et $n \in \mathbb{N}$. Montrer que la fonction polynomiale $\begin{cases} [0, a] \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto P_n(x) \end{cases}$ est M_a -lipschitzienne.

La fonction $u : x \mapsto P_n(x)$ est évidemment dérivable (car polynomiale). Pour tout $x \in [0, a]$, on a

$$\begin{aligned} u'(x) &= \sum_{k=1}^n (-1)^k 2^k x^{2^k-1} \\ \text{donc } |u'(x)| &\leq \sum_{k=1}^n 2^k |x|^{2^k-1} && \text{(inégalité triangulaire)} \\ &\leq \sum_{k=1}^n 2^k a^{2^k-1} && \text{(par croissance de } t \mapsto t^{2^k-1} \text{ sur } \mathbb{R}_+) \\ &\leq \sum_{\ell=1}^{2^n} \ell a^{\ell-1} && \text{(en rajoutant des termes } \geq 0) \\ &\leq g_{2^n}(a) \leq M_a. \end{aligned}$$

8. Montrer que φ est continue.

On vient de montrer que $x \mapsto P_n(x)$ était M_a -lipschitzienne sur $[0, a]$.

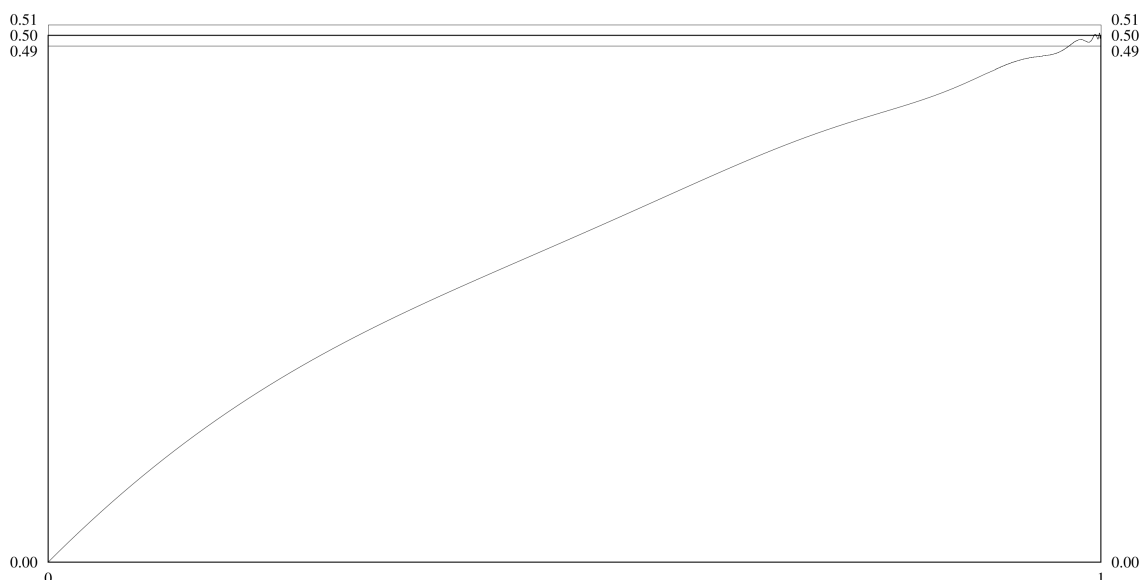
Pour tous $x_1, x_2 \in [0, a]$, on a $\underbrace{|P_n(x_1) - P_n(x_2)|}_{\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} |\varphi(x_1) - \varphi(x_2)|} \leq M_a |x_1 - x_2|$ donc, par passage à la limite dans les inégalités larges, $|\varphi(x_1) - \varphi(x_2)| \leq M_a |x_1 - x_2|$. On a montré que la restriction à $[0, a]$ de la fonction φ était M_a -lipschitzienne.

En particulier, la restriction de φ à tout segment de la forme $[0, a]$ (pour $a < 1$) est lipschitzienne.

Soit maintenant $x_0 \in [0, 1[$. On peut trouver $a \in [0, 1[$ tel que $x_0 < a$ (par exemple, $a = (x_0 + 1)/2$). La fonction φ et sa restriction à $[0, a]$ coïncident au voisinage de x_0 , et la restriction est continue, car lipschitzienne. La fonction φ est donc elle aussi continue en x_0 , d'après le caractère local de la continuité.

On a donc montré que φ était continue en tout point de $[0, 1[$, ce qui conclut.

On peut finir cette partie en regardant le graphe de la fonction φ (j'ai pris ce dessin sur la page de Noam Elkies : https://people.math.harvard.edu/~elkies/Misc/gamma_pic0.pdf, à qui l'argument de la partie II est d'ailleurs dû).



Si on l'observe soigneusement, le graphe montre des (petites) oscillations au voisinage de 1, mais il n'est pas du tout évident que leur amplitude ne tend pas vers 0, c'est-à-dire que la fonction φ diverge en 1...

Partie II. Cas fermé $I = [0, 1]$: non-existence.

On étudie maintenant le cas $I = [0, 1]$. On continue à noter φ la fonction continue sur $[0, 1[$ identifiée dans les questions précédentes.

9. Montrer qu'il existe une fonction $f \in C^0([0, 1])$ vérifiant (H) si et seulement si $\varphi(x) \xrightarrow{x \rightarrow 1} \frac{1}{2}$.

Supposons qu'il existe une fonction $f \in C^0([0, 1])$ vérifiant (H). En particulier, la restriction de cette fonction à $[0, 1[$ est une fonction continue vérifiant (H) donc l'unicité démontrée au début du problème entraîne que cette restriction est φ . On sait également que $f(1) = \frac{1}{2}$.

Par continuité de f en 1, on a $f(x) \xrightarrow[x < 1]{x \rightarrow 1} f(1)$ c'est-à-dire $\varphi(x) \xrightarrow{x \rightarrow 1} \frac{1}{2}$.

Réciproquement, supposons $\varphi(x) \xrightarrow{x \rightarrow 1} \frac{1}{2}$. D'après le théorème de prolongement continu, la fonction $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ vérifiant $\forall x \in [0, 1[, f(x) = \varphi(x)$ et $f(1) = \frac{1}{2}$ est encore continue.

Par construction, f vérifie déjà $\forall x \in [0, 1[, f(x) = x - f(x^2)$.

Elle le vérifie également pour $x = 1$, car $\frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{2}$.

La fonction $f \in C^0([0, 1])$ vérifie donc (H).

10. Montrer $\forall x \in [0, 1[, \forall n \in \mathbb{N}, |\varphi(x) - P_n(x)| \leq x^{2^{n+1}}$.

Soit $x \in [0, 1[$ et $n \in \mathbb{N}$.

► Supposons n pair et écrivons-le $n = 2m$. À l'aide de la question 3a, on montre par récurrence que

$$\forall \ell \geq m, P_{2m+1}(x) \leq P_{2\ell+1} \leq P_{2\ell}(x) \leq P_{2m}(x).$$

En oubliant la disjonction entre pairs et impairs, cela donne $\forall k \geq n, P_{n+1}(x) \leq P_k(x) \leq P_n(x)$.

Comme $P_k(x) \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} \varphi(x)$, on en déduit $P_{n+1}(x) \leq \varphi(x) \leq P_n(x)$ par passage à la limite dans les inégalités larges.

Cela signifie que $-x^{2^{n+1}} = P_{n+1}(x) - P_n(x) \leq \varphi(x) - P_n(x) \leq 0$.

► Si n est impair, on obtient de la même façon $\forall k \geq n, P_n(x) \leq P_k(x) \leq P_{n+1}(x)$, donc

$$0 \leq \varphi(x) - P_n(x) \leq P_{n+1}(x) - P_n(x) = x^{2^{n+1}}.$$

Dans tous les cas, on a démontré $-x^{2^{n+1}} \leq \varphi(x) - P_n(x) \leq x^{2^{n+1}}$, ce qui équivaut à la majoration demandée.

La question précédente permet de calculer avec une grande précision des valeurs de la fonction φ . Elle permet notamment de trouver $x_* \in]0, 1[$ tel que $\varphi(x_*) > \frac{1}{2}$ ($x_* = 199/200$ convient, et on peut le montrer en appliquant la question à $n = 10$). On pourra utiliser dans la fin un tel réel x_* .

11. (a) Montrer $\forall x \in [0, 1[, \varphi(x) \geq \varphi(x^4)$.

Soit $x \in [0, 1[$. En appliquant deux fois (H), à x puis à x^2 , on obtient

$$\varphi(x) = x - \varphi(x^2) = x - (x^2 - \varphi(x^4)) = \underbrace{x - x^2}_{\geq 0} + \varphi(x^4) \geq \varphi(x^4).$$

(b) En déduire qu'il n'existe pas de fonction $f \in C^0([0, 1])$ vérifiant (H).

Pour tout $x \in [0, 1[$, la question précédente (appliquée à $x^{1/4}$) entraîne que $\varphi(x^{1/4}) \geq \varphi(x)$.

Une récurrence immédiate permet d'en déduire que $\forall n \in \mathbb{N}, \varphi(x^{4^{-n}}) \geq \varphi(x)$.

En particulier, pour $x = x_*$, on obtient $\forall n \in \mathbb{N}, \varphi(x_*^{4^{-n}}) \geq \varphi(x_*)$.

Or, $x_*^{4^{-n}} = \exp(\underbrace{4^{-n}}_{\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0} \ln(x_*)) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} e^0 = 1$ par continuité de l'exponentielle.

Si (par l'absurde) la fonction φ convergerait vers $\frac{1}{2}$ en 1, on aurait alors $\underbrace{\varphi(x_*^{4^{-n}})}_{\geq \varphi(x_*)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2}$.

Par passage à la limite dans les inégalités larges, on en déduirait $\varphi(x_*) \leq \frac{1}{2}$, ce qui contredit la définition de x_* et conclut la démonstration.

Problème B. Inégalité de Jarník (1926).

Soit $N \geq 2$ un entier et $f : [1, N] \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable telle que :

- la dérivée f' soit strictement croissante ;
- $\forall x \in [1, N], |f'(x)| \leq 1$.

Le but du problème est de majorer le nombre de points à coordonnées entières appartenant au graphe de f . Plus précisément, on note

$$E_N(f) = \{x \in [1, N] \mid f(x) \in \mathbb{Z}\}$$

et on va montrer $|E_N(f)| = O(N^{2/3})$.

Partie I. Échauffement.

1. Dans cette question uniquement, on enlève l'hypothèse de stricte croissance de la fonction f' . Montrer que $|E_N(f)| \leq N$ et que, pour certaines fonctions f , on a l'égalité.

- L'ensemble $E_N(f)$ est inclus dans $[1, N]$, donc $|E_N(f)| \leq |[1, N]| = N$.
- Pour la fonction $f : x \mapsto x$ (dont la dérivée vaut constamment 1), ou pour les fonctions constantes à valeurs entières (dont la dérivée est nulle), on obtient $E_N(f) = [1, N]$ donc $|E_N(f)| = N$.

2. (a) Montrer $\forall x \in]1, N[, |f'(x)| < 1$.

Soit $x \in]1, N[$.

Par stricte croissance de f' , on a $-1 \leq f'(-1) < f'(x) < f'(N) \leq 1$, donc $f'(x) \in]-1, 1[$.

- (b) Montrer $\forall x \in [1, N-1], |f(x+1) - f(x)| < 1$.

Soit $x \in [1, N-1]$. La fonction f est dérivable donc notamment continue sur $[x, x+1]$ et dérivable sur $]x, x+1[$. D'après le théorème des accroissements finis, on peut trouver $c \in]x, x+1[$ tel que

$$f(x+1) - f(x) = \frac{f(x+1) - f(x)}{(x+1) - x} = f'(c).$$

D'après la question précédente, on a donc $|f(x+1) - f(x)| = |f'(c)| < 1$.

3. On suppose pouvoir trouver $a \in E_N(f)$ tel que $a+1 \in E_N(f)$.

- (a) Montrer que $f(a+1) = f(a)$.

L'hypothèse $a+1 \in E_N(f)$ entraîne notamment $a \in [1, N-1]$.

D'après la question précédente, on a $|f(a+1) - f(a)| < 1$. Mais la différence $f(a+1) - f(a)$ est entière, donc elle est nulle.

- (b) Montrer que f est strictement décroissante sur $[1, a]$ et strictement croissante sur $[a+1, N]$.

On a déjà vu que la fonction f vérifiait les hypothèses du théorème des accroissements finis (ou du théorème de Rolle puisque ce sont les mêmes). On peut donc trouver $c \in]a, a+1[$ tel que $f'(c) = 0$. La stricte croissance de f' entraîne que f' est strictement positive sur $[c, N]$ et donc notamment sur $[a+1, N]$: la fonction f y est donc strictement croissante.

On raisonne de la même façon de l'autre côté.

- (c) En déduire que a est l'unique élément $x \in E_N(f)$ tel que $x+1 \in E_N(f)$.

Soit $x \in E_N(f)$ différent de a . Suivant la position de x par rapport à a , la question précédente montre que $f(x+1) > f(x)$ ou que $f(x+1) < f(x)$. Quoi qu'il arrive, on aura $f(x+1) \neq f(x)$.

D'après la question (a), cela exclut que $x+1$ puisse appartenir à $E_N(f)$.

4. Montrer $|E_N(f)| \leq 2 + \frac{N}{2}$.

On a $|E_N(f)| \leq |E_N^\circ(f)| + 1$, où $E_N^\circ(f) = \{x \in E_N(f) \mid x+1 \notin E_N(f)\}$. En effet, la discussion précédente montre que $E_N^\circ(f)$ s'obtient en ôtant à $E_N(f)$ au plus un élément.

Ensuite, la définition de $E_N^\circ(f)$ montre que l'ensemble translaté $E_N^+(f) = \{x+1 \mid x \in E_N(f)\}$ est disjoint de $E_N(f)$ et inclus dans $\llbracket 2, N+1 \rrbracket$. Notons qu'il est clairement en bijection avec $E_N^\circ(f)$.

On en déduit $E_N^\circ(f) \sqcup E_N^+(f) \subseteq \llbracket 1, N+1 \rrbracket$, d'où il vient $2|E_N^\circ(f)| \leq N+1$.

On en déduit $|E_N(f)| \leq 1 + \frac{N+1}{2} = \frac{N+3}{2}$. Cela entraîne la borne de l'énoncé.

Remarque. On pourrait en fait optimiser cette majoration et gratter un peu sur la borne que l'on a obtenue, mais elle est tellement faible que ça n'a pas une grande importance.

Partie II. Inégalité de Jarník.

On note désormais $r = |E_N(f)|$ et $x_1 < \dots < x_r$ les éléments de $E_N(f)$, classés par ordre croissant.

Enfin, pour tout $D \in \mathbb{N}^*$, on note $\mathcal{F}_D = \left\{ \frac{n}{d} \mid d \in \llbracket 1, D-1 \rrbracket, n \in \llbracket -d, d \rrbracket \right\}$ l'ensemble des fractions appartenant à $[-1, 1]$ et de dénominateur $< D$.

5. Soit $D \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $|\mathcal{F}_D| \leq D^2 - 1$.

Le cardinal de $\mathcal{F}_D$ est clairement majoré par celui de $\widetilde{\mathcal{F}}_D = \{(n, d) \mid d \in \llbracket 1, D-1 \rrbracket, n \in \llbracket -d, d \rrbracket\}$ (formellement parce qu'il y a une surjection $\widetilde{\mathcal{F}}_D \rightarrow \mathcal{F}_D$, définie par $(n, d) \mapsto \frac{n}{d}$, mais ça n'est pas la peine de le rédiger comme cela).

Il n'y a en général pas égalité parce que plusieurs couples donnent le même nombre : un nombre rationnel a plusieurs écritures comme fraction.

Quoi qu'il en soit, par le principe d'addition

$$|\mathcal{F}_D| \leq |\widetilde{\mathcal{F}}_D| = \sum_{d=1}^{D-1} |\llbracket -d, d \rrbracket| = \sum_{d=1}^{D-1} (2d+1) = 2 \frac{(D-1)D}{2} + D-1 = D^2 - 1.$$

Remarque. Cette majoration est assez grossière mais l'ordre de grandeur est le bon. Avec un peu plus d'arithmétique, on peut montrer que $|\mathcal{F}_D| \underset{D \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{6}{\pi^2} D^2$.

6. (a) Montrer que $\varphi : \begin{cases} \llbracket 1, r-1 \rrbracket \rightarrow \\ i \mapsto \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i} \end{cases}$ est une application bien définie.

Soit $i \in \llbracket 1, r-1 \rrbracket$.

- Comme $1 \leq x_i < x_{i+1} \leq N$, la différence $d = x_{i+1} - x_i$ appartient à $\llbracket 1, N-1 \rrbracket$.
- Puisque f est 1-lipschitzienne (à cause de l'inégalité des accroissements finis et de la borne sur f'), $|f(x_{i+1}) - f(x_i)| \leq |x_{i+1} - x_i| = d$, c'est-à-dire que la différence $n = f(x_{i+1}) - f(x_i)$ (nécessairement entière) appartient à $\llbracket -d, d \rrbracket$.

On en déduit que $\varphi(i) = \frac{n}{d}$ appartient bien à $\mathcal{F}_N$: l'application φ est bien définie.

(b) Montrer que φ est injective.

Soit $i \in \llbracket 1, r-2 \rrbracket$. On ne vérifie pas que f vérifie les hypothèses du théorème des accroissements finis, mais on l'applique entre x_i et x_{i+1} : on trouve ainsi un point $c \in]x_i, x_{i+1}[$ vérifiant l'égalité

$$\varphi(i) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i} = f'(c).$$

De la même façon, on trouve $d \in]x_{i+1}, x_{i+2}[$ tel que $\varphi(i+1) = f'(d)$.

Comme f' est strictement croissante, on a $\varphi(i) = f'(c) < f'(d) = \varphi(i+1)$.

Strictement croissante, l'application φ est donc injective.

(c) Obtient-on ainsi une majoration intéressante de $r = |E_N(f)|$?

On obtient une majoration, c'est déjà ça. Plus précisément, on a obtenu $r-1 \leq |\mathcal{F}_N| \leq N^2 - 1$, donc $r = |E_N(f)| \leq N^2$.

Évidemment, pour une partie de $\llbracket 1, N \rrbracket$, ça n'est pas fameux.

7. On fixe maintenant $D \in \llbracket 1, N \rrbracket$.

(a) En utilisant l'approche de la question précédente, montrer que $\{i \in \llbracket 1, r-1 \rrbracket \mid x_{i+1} - x_i < D\}$ possède au plus $D^2 - 1$ éléments.

La restriction de φ à cet ensemble $I_{\text{proche}} = \{i \in \llbracket 1, r-1 \rrbracket \mid x_{i+1} - x_i < D\}$ est évidemment toujours injective. L'argument donné pour montrer que φ était bien définie (c'est-à-dire que ses valeurs atterrissaient bien dans l'ensemble $\mathcal{F}_N$) montre maintenant que φ envoie (injectivement) I_{proche} dans l'ensemble $\mathcal{F}_D$, d'où $|I_{\text{proche}}| \leq |\mathcal{F}_D| \leq D^2 - 1$.

(b) Montrer $r \leq \frac{N-1}{D} + D^2$.

En notant symétriquement $I_{\text{dist}} = \{i \in \llbracket 1, r-1 \rrbracket \mid x_{i+1} - x_i \geq D\}$, on a $\llbracket 1, r-1 \rrbracket = I_{\text{proche}} \sqcup I_{\text{dist}}$, si bien qu'on obtiendra une majoration de $r = |E_N(f)|$ si l'on sait majorer le cardinal de I_{dist} . C'est une idée très simple : on ne peut pas mettre beaucoup de points très distants les uns des autres dans un espace fixé.

Plus précisément, on a les inégalités

$$D |I_{\text{dist}}| \leq \sum_{i \in I_{\text{dist}}} \underbrace{(x_{i+1} - x_i)}_{\geq D} \leq \sum_{i=1}^{r-1} (x_{i+1} - x_i) = x_r - x_1 \leq N - 1,$$

$$\text{donc } |I_{\text{dist}}| \leq \frac{N-1}{D}.$$

(Le raisonnement précédent peut provoquer des crises d'angoisse zérologique si $r = 0$ ou $r = 1$ mais l'inégalité obtenue reste vraie dans ce cas).

$$\text{On en déduit } r-1 = |I_{\text{proche}} \sqcup I_{\text{dist}}| = |I_{\text{proche}}| + |I_{\text{dist}}| \leq (D^2 - 1) + \frac{N-1}{D}, \text{ d'où } r \leq \frac{N-1}{D} + D^2.$$

8. Montrer $|E_N(f)| \leq M_N$, pour une certaine suite explicite $(M_N)_{N \in \mathbb{N}^*}$ vérifiant $M_N = O(N^{2/3})$.

On applique l'inégalité précédente à $D = \lfloor N^{1/3} \rfloor$ (d'autres nombres proches conviendraient). On a alors

- d'une part, $D \leq N^{1/3}$, donc $D^2 \leq N^{2/3}$;
- de l'autre, $D \geq N^{1/3} - 1$, donc $\frac{N-1}{D} \leq \frac{N-1}{N^{1/3}-1} = N^{2/3} + N^{1/3} + 1$.

Ainsi, on a montré $|E_N(f)| \leq 2N^{2/3} + N^{1/3} + 1$, et il est clair que $2N^{2/3} + N^{1/3} + 1 = O(N^{2/3})$.