
Sixième composition de mathématiques

Durée : 4 heures.

Toute sortie est interdite pendant les dix dernières minutes.

La vie est brève, le sujet est long : ne bâclez rien pour autant.

*Les documents, calculatrices, etc. sont **interdits**.*

Consignes générales de présentation

La présentation de la copie est prise en compte dans l'évaluation.

- ▶ *Ne composez pas sur la première page, ce qui me permettra d'écrire mes commentaires.*
- ▶ *Merci d'encadrer ou de souligner vos résultats.*
- ▶ *Numérotez vos copies doubles, et rendez-les dans l'ordre, la première servant de chemise pour les suivantes, qui ne seront pas imbriquées les unes dans les autres.*
- ▶ *Les parties trop difficiles à lire de votre copie ne seront pas lues.*

Exercice 1

On compte dans cet exercice des nombres à quatre chiffres, de 0000 à 9999 (il y a donc 10 000 nombres au total).

On vous demande de présenter vos résultats sous la forme de **vrais** nombres, c'est-à-dire par exemple 280 et pas $5 \times 7 \times 8$. Une erreur de calcul élémentaire entraînera la perte des points attribués à la question. Une table de multiplication vous sera fournie sur simple demande, dans la limite des stocks disponibles.

1. Combien de ces nombres possèdent quatre chiffres différents ?
2. Combien de ces nombres possèdent (au moins) un chiffre 5 mais pas de chiffre 8 ?
3. Combien de ces nombres sont divisibles par 7 ?
4. Combien de ces nombres sont constitués de quatre chiffres consécutifs, disposés dans un certain ordre (comme par exemple 4235) ?
5. Combien de ces nombres ont des chiffres dont la somme vaut 11 ?

Exercice 2. Inégalité de Fisher (1940).

Soit $n, p \in \mathbb{N}^*$.

1. On suppose dans cette question $p > n$, et on considère une matrice $M \in M_{n,p}(\mathbb{R})$, que l'on écrit par blocs avec un premier bloc carré : $M = \begin{pmatrix} U & H \end{pmatrix}$, où $U \in M_n(\mathbb{R})$ et $H \in M_{n,p-n}(\mathbb{R})$.

(a) Soit $X \in \mathbb{R}^n$ et $Y \in \mathbb{R}^{p-n}$. Calculer le produit par blocs $M \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$.

(b) On suppose U inversible.

Montrer que pour tout $Y \in \mathbb{R}^{p-n}$, il existe $X \in \mathbb{R}^n$ tel que $M \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = 0_{\mathbb{R}^n}$.

(c) Montrer que, dans tous les cas, $\ker M \neq \{0_{\mathbb{R}^p}\}$.

2. Soit $M \in M_{n,p}(\mathbb{R})$ telle que $M^T M \in GL_p(\mathbb{R})$. Montrer que $p \leq n$.

3. **Une classe de matrices inversibles.** Soit $\lambda_1, \dots, \lambda_p \in \mathbb{R}$ et $A = \begin{pmatrix} 1 + \lambda_1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 + \lambda_2 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & 1 + \lambda_p \end{pmatrix}$.

(a) Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} \in \ker A$. Montrer que $\sum_{k=1}^p \lambda_k x_k^2 + \left(\sum_{k=1}^p x_k \right)^2 = 0$.

Indication. On pourra calculer $X^T A X$.

(b) En déduire que, si les réels $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ sont strictement positifs, alors A est inversible.

4. On considère dans cette dernière question un entier $t \in \mathbb{N}^*$ et des parties $C_1, \dots, C_p$ de l'ensemble $\llbracket 1, n \rrbracket$ vérifiant les conditions suivantes :

- toutes les parties considérées possèdent strictement plus de t éléments : $\forall j \in \llbracket 1, p \rrbracket, |C_j| > t$;
- deux parties possèdent exactement t éléments en commun : $\forall j \neq k \in \llbracket 1, p \rrbracket, |C_j \cap C_k| = t$.

On définit alors la *matrice d'incidence* associée à ces parties : $M = (\mathbb{1}_{(i \in C_j)})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} \in M_{n,p}(\mathbb{R})$. En français, le coefficient (i, j) de la matrice M vaut 1 si l'entier i appartient à la partie C_j , et 0 sinon.

Calculer la matrice $M^T M$ et en déduire l'*inégalité de Fisher* : $p \leq n$.

Problème A. Équation fonctionnelle de Hardy (1907).

Dans ce problème, I désignera soit l'intervalle semi-ouvert $[0, 1[$, soit le segment $[0, 1]$. L'objectif est de déterminer s'il existe des fonctions $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ continues telles que

$$\forall x \in I, f(x) = x - f(x^2). \quad (H)$$

1. Soit f une fonction continue vérifiant (H).
 - (a) Montrer $f(0) = 0$.
 - (b) On suppose $I = [0, 1]$. Calculer $f(1)$.
2. **Unicité.**
 - (a) Soit $h \in C^0(I)$ telle que $\forall x \in I, h(x) = -h(x^2)$. Montrer que $\forall x \in [0, 1[, h(x) = h(0)$.
 - (b) Soit $f, g \in C^0(I)$ vérifiant (H). Montrer $f = g$.

Partie I. Cas semi-ouvert $I = [0, 1[$: existence.

Dans toute cette partie, on considère le cas $I = [0, 1[$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $P_n = \sum_{k=0}^n (-1)^k x^{2^k}$.

3. Soit $x \in [0, 1[$.
 - (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer $P_{2n-1}(x) \leq P_{2n+1}(x) \leq P_{2n+2}(x) \leq P_{2n}(x)$.
 - (b) Montrer que la suite $(P_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ converge.

On notera $\varphi(x)$ la limite de cette suite, ce qui définit une fonction $\varphi : [0, 1[\rightarrow \mathbb{R}$.

Par construction, on a donc $\forall x \in [0, 1[, P_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \varphi(x)$.

4. Soit $x \in [0, 1[$. Montrer $\forall n \in \mathbb{N}^*, P_{n+1}(x) = x - P_n(x^2)$ et en déduire que φ vérifie (H).

Dans les questions suivantes, on considère, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, la fonction $g_p : x \mapsto \sum_{k=1}^p k x^{k-1}$.

5. Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Exprimer g_p comme la dérivée d'une fonction encore plus simple, et en déduire son expression.
6. Soit $a \in [0, 1[$.
 - (a) Montrer $p a^p \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} 0$.
 - (b) Montrer $\forall p \in \mathbb{N}^*, g_p(a) \leq M_a$, où $M_a = (1 - a)^{-2}$.
7. Soit $a \in]0, 1[$ et $n \in \mathbb{N}$. Montrer que la fonction polynomiale $\begin{cases} [0, a] \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto P_n(x) \end{cases}$ est M_a -lipschitzienne.
8. Montrer que φ est continue.

Partie II. Cas fermé $I = [0, 1]$: non-existence.

On étudie maintenant le cas $I = [0, 1]$. On continue à noter φ la fonction continue sur $[0, 1[$ identifiée dans les questions précédentes.

9. Montrer qu'il existe une fonction $f \in C^0([0, 1])$ vérifiant (H) si et seulement si $\varphi(x) \xrightarrow{x \rightarrow 1} \frac{1}{2}$.
10. Montrer $\forall x \in [0, 1[, \forall n \in \mathbb{N}, |\varphi(x) - P_n(x)| \leq x^{2^{n+1}}$.

La question précédente permet de calculer avec une grande précision des valeurs de la fonction φ . Elle permet notamment de trouver $x_* \in]0, 1[$ tel que $\varphi(x_*) > \frac{1}{2}$ ($x_* = 199/200$ convient, et on peut le montrer en appliquant la question à $n = 10$). On pourra utiliser dans la fin un tel réel x_* .

11.
 - (a) Montrer $\forall x \in [0, 1[, \varphi(x) \geq \varphi(x^4)$.
 - (b) En déduire qu'il n'existe pas de fonction $f \in C^0([0, 1])$ vérifiant (H).

Problème B. Inégalité de Jarník (1926).

Soit $N \geq 2$ un entier et $f : [1, N] \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable telle que :

- la dérivée f' soit strictement croissante ;
- $\forall x \in [1, N], |f'(x)| \leq 1$.

Le but du problème est de majorer le nombre de points à coordonnées entières appartenant au graphe de f . Plus précisément, on note

$$E_N(f) = \{x \in [1, N] \mid f(x) \in \mathbb{Z}\}$$

et on va montrer $|E_N(f)| = O(N^{2/3})$.

Partie I. Échauffement.

1. Dans cette question uniquement, on enlève l'hypothèse de stricte croissance de la fonction f' .
Montrer que $|E_N(f)| \leq N$ et que, pour certaines fonctions f , on a l'égalité.
2. (a) Montrer $\forall x \in]1, N[, |f'(x)| < 1$.
(b) Montrer $\forall x \in [1, N-1], |f(x+1) - f(x)| < 1$.
3. On suppose pouvoir trouver $a \in E_N(f)$ tel que $a+1 \in E_N(f)$.
(a) Montrer que $f(a+1) = f(a)$.
(b) Montrer que f est strictement décroissante sur $[1, a]$ et strictement croissante sur $[a+1, N]$.
(c) En déduire que a est l'unique élément $x \in E_N(f)$ tel que $x+1 \in E_N(f)$.
4. Montrer $|E_N(f)| \leq 2 + \frac{N}{2}$.

Partie II. Inégalité de Jarník.

On note désormais $r = |E_N(f)|$ et $x_1 < \dots < x_r$ les éléments de $E_N(f)$, classés par ordre croissant.

Enfin, pour tout $D \in \mathbb{N}^*$, on note $\mathcal{F}_D = \left\{ \frac{n}{d} \mid d \in [1, D-1], n \in [-d, d] \right\}$ l'ensemble des fractions appartenant à $[-1, 1]$ et de dénominateur $< D$.

5. Soit $D \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $|\mathcal{F}_D| \leq D^2 - 1$.
6. (a) Montrer que $\varphi : \begin{cases} [1, r-1] \rightarrow \mathcal{F}_N \\ i \mapsto \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i} \end{cases}$ est une application bien définie.
(b) Montrer que φ est injective.
(c) Obtient-on ainsi une majoration intéressante de $r = |E_N(f)|$?
7. On fixe maintenant $D \in [1, N]$.
(a) En utilisant l'approche de la question précédente, montrer que $\{i \in [1, r-1] \mid x_{i+1} - x_i < D\}$ possède au plus $D^2 - 1$ éléments.
(b) Montrer $r \leq \frac{N-1}{D} + D^2$.
8. Montrer $|E_N(f)| \leq M_N$, pour une certaine suite explicite $(M_N)_{N \in \mathbb{N}^*}$ vérifiant $M_N = O(N^{2/3})$.