Septième composition de mathématiques [corrigé]

Exercice 1

Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, on considère les ensembles

$$F = \left\{ (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \,\middle|\, \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+10} = u_n \right\} \qquad \text{et} \qquad G = \left\{ (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \,\middle|\, u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \right\}.$$

1. F et G sont-ils des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$?

   Dans les deux cas, ce sont des propriétés de stabilité par opérations que l'on a vues en cours. Détaillons un peu.

   - • *La suite nulle est clairement* 10*-périodique :* $0_{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}} \in F$.
     • *Soit* $u, v \in F$ *et* $\lambda \in \mathbb{R}$.

     Pour tout $n \in \mathbb{N}$*, on a* $(\lambda u + v)_{n+10} = \lambda u_{n+10} + v_{n+10} = \lambda u_n + v_n$*, donc la suite* $\lambda u + v$ *est* 10*-périodique :* $\lambda u + v \in F$.

     Cela montre que F *est un sous-espace vectoriel de* $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.
   - • *La suite nulle converge vers* 0 *:* $0_{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}} \in G$.
     • *Soit* $u, v \in G$ *et* $\lambda \in \mathbb{R}$.

     On a $(\lambda u + v)_n = \lambda u_n + v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$*, donc* $\lambda u + v \in G$.

     Cela montre que G *est un sous-espace vectoriel de* $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

2. F et G sont-ils en somme directe ?

   Oui. *Montrons-le.*

   Soit $u \in F \cap G$*. Montrons que la suite* u *est nulle. Soit* $k \in \mathbb{N}$.

   Par 10*-périodicité (et une récurrence immédiate), on a* $\forall n \in \mathbb{N}, u_k = u_{k+10n}$*. Or,* $u_{k+10n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ *car il s'agit d'une suite extraite de* u.

   Par unicité de la limite, on en déduit $u_k = 0$.

   Cela ayant été démontré pour $k \in \mathbb{N}$ *quelconque, on a bien* $u = 0_{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}}$*, et donc* $F \cap G = \{0_{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}}\}$.

3. F et G sont-ils supplémentaires ?

   Non. *Je vais donner un argument un peu indirect. Je note* ℓ^∞ *le sous-espace vectoriel de* $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ *constitué des suites bornées.*

   - *Toute suite* 10*-périodique* u *prend ses valeurs dans* $\{u_0, u_1, \ldots, u_9\}$ *donc est* a fortiori *bornée :* $F \subseteq \ell^\infty$.
   - *Toute suite convergente est bornée donc, en particulier,* $G \subseteq \ell^\infty$.

   On en déduit $F + G \subseteq \ell^\infty$*. Comme il existe des suites non bornées (la suite* $(n)_{n\in\mathbb{N}}$*, par exemple), on a bien* $F + G \neq \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

Exercice 2

1. Soit u et v deux endomorphismes d'un même espace vectoriel E tels que $u \circ v = u$ et $v \circ u = v$.

   Montrer que u et v sont deux projecteurs de même noyau.

   On a $u^2 = u \circ v \circ u = u \circ v = u$, *ce qui montre que* u *est un projecteur. On procède exactement de la même façon pour* v.

   Par ailleurs,

   - *l'égalité* $u \circ v = u$ *montre que* $\ker v \subseteq \ker u$;
   - *l'égalité* $v \circ u = v$ *montre que* $\ker u \subseteq \ker v$,

   ce qui montre $\ker u = \ker v$.

2. Réciproquement, soit $u, v \in \mathscr{L}(E)$ deux projecteurs de même noyau.

   Montrer que $u \circ v = u$ et $v \circ u = v$.

   On va utiliser de manière très rapide que deux vecteurs ont la même image par une certaine application linéaire si et seulement si leur différence est un élément de son noyau.

   Pour $x \in E$, *le fait que* u *soit un projecteur montre* $u^2(x) = u(x)$, *donc* $u(x) - x \in \ker u$. *Mais ce noyau est aussi celui de* v, *donc* $v\big(u(x)\big) = v(x)$.

   On a ainsi montré $\forall x \in E, (v \circ u)(x) = v(x)$, *ce qui démontre* $v \circ u = v$.

   On procède exactement de la même façon pour l'autre égalité.

Problème. Autour des applications de « multiévaluation ».

Le corps des scalaires K sera $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. (Dans certaines questions, on se placera spécifiquement dans l'un des deux cas.) Toutes les notions d'algèbre linéaire ((sous-)espaces vectoriels, applications linéaires, etc.) seront relatives au corps K.

Dans ce problème, on considérera un ensemble Ω et un sous-espace vectoriel E de l'espace K^Ω de toutes les fonctions $\Omega \to K$. Étant donné $z_1, \ldots, z_n \in \Omega$ (pour un certain entier $n \in \mathbb{N}^*$), on pourra ainsi étudier l'application de « multiévaluation ».

$$\Phi : \begin{cases} E \to & K^n \\ f \mapsto & \big(f(z_1), \ldots, f(z_n)\big). \end{cases}$$

L'entier n est toujours supposé appartenir à $\mathbb{N}^*$.

1. Montrer que Φ est une application linéaire.

   Soit $f, g \in E$ *et* $\lambda \in K$. *On a alors, pour tout* $k \in [\![1, n]\!]$, $\big(\lambda f + g\big)(z_k) = \lambda f(z_k) + g(z_k)$, *donc* $\Phi(\lambda f + g) = \begin{pmatrix} \lambda f(z_1) + g(z_1) \\ \vdots \\ \lambda f(z_n) + g(z_n) \end{pmatrix} = \lambda \Phi(f) + \Phi(g)$, *ce qui montre la linéarité de* Φ.

2. Montrer que si Φ est surjective, alors les éléments $z_1, \ldots, z_n \in \Omega$ sont distincts.

   Si $i \neq j \in [\![1, n]\!]$ *étaient tels que* $z_i = z_j$, *l'image de* Φ *serait incluse dans le sous-espace vectoriel (en fait, l'hyperplan) des vecteurs dont les* i*-ème et* j*-ième coordonnées sont égales, ce qui montrerait que* Φ *n'est pas surjective.*

   Cela conclut, par contraposée.

Partie I. Quelques cas de surjectivité totale.

3. On considère dans cette question $z_1, \dots, z_n \in \mathrm{K}$ et l'application $\Phi : \begin{cases} \mathrm{K}[X] \to & \mathrm{K}^n \\ P \mapsto & \big(P(z_1), \dots, P(z_n)\big). \end{cases}$
   On note par ailleurs $\Pi = \prod_{k=1}^{n} (X - z_k)$.
   (a) Montrer que l'ensemble $\mathscr{M}_\Pi = \{Q\Pi \mid Q \in \mathrm{K}[X]\}$ des polynômes multiples de Π est un sous-espace vectoriel de $\mathrm{K}[X]$.

      L'application $\begin{cases} \mathrm{K}[X] \to \mathrm{K}[X] \\ Q \mapsto Q\Pi \end{cases}$ *est clairement linéaire (par bilinéarité du produit polynomial). Son image* $\mathscr{M}_\Pi$ *est donc un sous-espace vectoriel de* $\mathrm{K}[X]$.

   (b) Montrer que $\mathrm{K}[X] = \mathrm{K}_{n-1}[X] \oplus \mathscr{M}_\Pi$.

      Somme directe. *Soit* $P \in \mathrm{K}_{n-1}[X] \cap \mathscr{M}_\Pi$. *On peut donc trouver* $Q \in \mathrm{K}[X]$ *tel que* $P = Q\Pi$.

      Les règles sur le degré entraînent que $\deg P = \deg Q + \deg \Pi = \deg Q + n$.

      Comme $\deg P \leqslant n - 1$, *on a* $\deg Q \leqslant -1$. *Il s'ensuit* $\deg Q = -\infty$, *c'est-à-dire* $Q = 0$, *et on en déduit* $P = 0$.

      Somme totale. *Soit* $P \in \mathrm{K}[X]$. *On peut trouver un quotient* $Q \in \mathrm{K}[X]$ *et un reste* $R \in \mathrm{K}[X]$ *de degré* $< \deg \Pi = n$ *tels que* $P = Q\Pi + R$. *On a donc* $P = \underbrace{R}_{\in \mathrm{K}_{n-1}[X]} + \underbrace{Q\Pi}_{\in \mathscr{M}_\Pi}$, *ce qui conclut.*

   (c) Montrer que $\ker \Phi = \mathscr{M}_\Pi$ si et seulement si $z_1, \dots, z_n$ sont distincts.

      ▸ *Soit* $P \in \mathscr{M}_\Pi$. *On peut donc trouver* $Q \in \mathrm{K}[X]$ *tel que* $P = Q\Pi$. *On en déduit que, pour tout* $i \in [\![1, n]\!]$, $P(z_i) = Q(z_i) \underbrace{\Pi(z_i)}_{=0} = 0$, *ce qui démontre* $\Phi(P) = 0$.

      ▸ *L'inclusion réciproque étant automatique, il reste à montrer que l'équivalence entre l'inclusion directe* $\ker \Phi \subseteq \mathscr{M}_\Pi$ *et le fait que les* $z_1, \dots, z_n$ *sont distincts.*

      - *Supposons* $z_1, \dots, z_n$ *distincts. Soit* $P \in \ker \Phi$. *On a donc* $P(z_1) = \dots = P(z_n) = 0$. *Comme les* z_i *sont distincts, le lemme de factorisation entraîne que* P *est multiple de* Π : $P \in \mathscr{M}_\Pi$.
      - *Par contraposée, supposons* $z_1, \dots, z_n$ *non distincts : on peut donc trouver* $i \neq j$ *tels que* $z_i = z_j$. *Quitte à les réordonner, on va supposer* $i = n - 1$ *et* $j = n$.

        Le polynôme $\check{\Pi} = \prod_{k=1}^{n-1} (X - z_k)$ *est alors nul en* $z_1, \dots, z_{n-1}$, *et donc en* $z_n = z_{n-1}$, *c'est-à-dire que* $\check{\Pi} \in \ker \Phi$.

        Or, $\check{\Pi}$ *étant de degré* $n - 1$, *il ne peut pas être multiple de* Π : $\check{\Pi} \notin \mathscr{M}_\Pi$.

        Cela montre $\ker \Phi \not\subseteq \mathscr{M}_\Pi$.

   (d) On suppose $z_1, \dots, z_n$ distincts. Montrer que Φ est surjective.

      D'après la forme géométrique du théorème du rang, Φ *induit un isomorphisme* $\mathrm{K}_{n-1}[X] \to \operatorname{im} \Phi$. *Cela montre notamment* $\operatorname{rg} \Phi = \dim \operatorname{im} \Phi = \dim \mathrm{K}_{n-1}[X] = n$.

      L'application linéaire Φ *est donc surjective.*

Dans toute la fin de cette partie, on se placera sur le corps $\mathrm{K} = \mathbb{R}$. On notera $D : \begin{cases} C^\infty(\mathbb{R}) \to C^\infty(\mathbb{R}) \\ f \mapsto f' \end{cases}$ l'opérateur de dérivation (dont on ne demande pas de démontrer la linéarité).

4. Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on notera $e_\lambda : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto e^{\lambda x}. \end{cases}$

   Soit $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ distincts et $E = \mathrm{Vect}(e_{\lambda_1}, \dots, e_{\lambda_n})$.

   (a) Montrer que $\dim E = n$.

   Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. La fonction e_λ n'est clairement pas nulle et vérifie $D(e_\lambda) = \lambda\, e_\lambda$. Il s'agit donc d'un vecteur propre pour D, associé à la valeur propre λ.

   Vecteurs propres de D associés à des valeurs propres différentes, $e_{\lambda_1}, \dots, e_{\lambda_n}$ forment une famille libre, ce qui montre que $E = \mathrm{Vect}(e_{\lambda_1}, \dots, e_{\lambda_n})$ est de dimension n.

   (b) Montrer que E est stable sous l'opérateur $D : \forall f \in E, D(f) \in E$.

   On a

$$\begin{aligned} D\,[E] = D\,[\mathrm{Vect}(e_{\lambda_1}, \dots, e_{\lambda_n})] = \mathrm{Vect}(D(e_{\lambda_1}), \dots, D(e_{\lambda_n})) &= \mathrm{Vect}(\lambda_1\, e_{\lambda_1}, \dots, \lambda_n\, e_{\lambda_n}) \\ &\subseteq \mathrm{Vect}(e_{\lambda_1}, \dots, e_{\lambda_n}) = E, \end{aligned}$$

   ce qui montre que E est stable sous D.

   L'opérateur de dérivation induit donc un endomorphisme de E que l'on note $D_E \in \mathscr{L}(E)$.

   (c) Calculer le rang de D_E et en déduire que D_E est un automorphisme de E si et seulement si l'on a $\forall k \in [\![1, n]\!], \lambda_k \neq 0$.

   Notons r le nombre d'indices i tels que λ_i soit non nul. Quitte à réordonner les vecteurs, on va supposer $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in \mathbb{R}^*$ et $\lambda_{r+1} = \dots = \lambda_n = 0$. Le calcul précédent montre que

$$\mathrm{im}\, D_E = D\,[E] = \mathrm{Vect}(\lambda_1\, e_{\lambda_1}, \dots, \lambda_r\, e_{\lambda_r}, 0, \dots, 0).$$

   Par non-nullité des scalaires, la famille $(\lambda_1\, e_{\lambda_1}, \dots, \lambda_r\, e_{\lambda_r})$ hérite de la liberté de $(e_{\lambda_1}, \dots, e_{\lambda_r})$, ce qui montre que $\mathrm{im}\, D_E$ est de dimension r.

   Ainsi, le rang de D_E est le nombre de scalaires non nuls dans le n-uplet $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$.

   En particulier,

$$D_E \in GL(E) \Leftrightarrow \mathrm{rg}\, D_E = n \Leftrightarrow r = n \Leftrightarrow \forall k \in [\![1, n]\!], \lambda_k \neq 0.$$

5. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $P(n)$ l'assertion :

   « Quels que soient les scalaires $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n \in \mathbb{R}$, toute fonction $f \in \mathrm{Vect}\big(e_{\lambda_1}, \dots, e_{\lambda_n}\big)$ est nulle ou s'annule au plus $n - 1$ fois. »

   Montrer $\forall n \in \mathbb{N}^*, P(n)$ par récurrence.

   Initialisation. *Soit $\lambda_1 \in \mathbb{R}$. Soit $f \in \mathrm{Vect}\big(e_{\lambda_1}\big)$, que l'on écrit donc $f = \alpha_1\, e_{\lambda_1}$ pour un certain $\alpha_1 \in \mathbb{R}$.*
   - *Si $\alpha_1 = 0$, f est la fonction nulle.*
   - *Sinon, f ne s'annule jamais car l'exponentielle e_{λ_1} ne s'annule jamais. Elle s'annule donc au plus $1 - 1$ fois.*

   Cela montre $P(1)$.

   Hérédité. *Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $P(n)$. Soit $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n, \lambda_{n+1} \in \mathbb{R}$, puis $f \in \mathrm{Vect}(e_{\lambda_1}, \dots, e_{\lambda_n}, e_{\lambda_{n+1}})$: on peut donc trouver $\alpha_1, \dots, \alpha_{n+1}$ tel que $f = \displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} \alpha_k\, e_{\lambda_k}$.*

   Posons $g : x \mapsto e^{-\lambda_{n+1} x} f(x)$. Il est clair que $g \in \mathrm{Vect}(e_{\lambda_1 - \lambda_{n+1}}, \dots, e_{\lambda_n - \lambda_{n+1}}, \underbrace{e_0}_{=1})$, puis que $g' = D(g) \in \mathrm{Vect}(e_{\lambda_1 - \lambda_{n+1}}, \dots, e_{\lambda_n - \lambda_{n+1}})$, la dérivation ayant tué la constante e_0.

Supposons que f *s'annule au moins* $n+1$ *fois. Il en va alors de même de* g *: on pourrait trouver* $t_1 < t_2 < \cdots < t_{n+1}$ *en lesquels* g *s'annule.*

En appliquant, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$*, le théorème de Rolle à la fonction* g *(qui est lisse donc notamment continue sur* $[t_i, t_{i+1}]$ *et dérivable sur* $]t_i, t_{i+1}[$*, et qui vérifie* $g(t_i) = g(t_{i+1}) = 0$*), on obtient un point* $s_i \in]t_i, t_{i+1}[$ *tel que* $g'(s_i) = 0$*.*

On a ainsi construit n *points d'annulation* $s_1 < s_2 < \cdots < s_n$ *pour la fonction dérivée* g'*, qui appartient à* $\mathrm{Vect}(e_{\lambda_1-\lambda_{n+1}}, \ldots, e_{\lambda_n-\lambda_{n+1}})$ *(sous-espace vectoriel engendré par* n *fonctions). D'après* $P(n)$*, on en déduit que* g' *est nulle, c'est-à-dire que* g *est constante (égale à* $g(0)$*, disons), donc que* $f : x \mapsto g(0)\, e^{\lambda_{n+1} x}$*.*

Comme dans l'initialisation, cette fonction f *ne peut s'annuler* $n+1$ *fois qu'en étant nulle : on a donc montré* $f = 0$*, ce qui conclut.*

6. Soit $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ distincts et $E = \mathrm{Vect}\big(e_{\lambda_1}, \ldots, e_{\lambda_n}\big)$. Soit $z_1, \ldots, z_n \in \mathbb{R}$ distincts.

   Montrer que l'application de multiévaluation $\Phi : \begin{cases} E \to & \mathbb{R}^n \\ f \mapsto & \big(f(z_1), \ldots, f(z_n)\big) \end{cases}$ est un isomorphisme.

   - *Soit* $f \in \ker \Phi$*. La fonction* $f \in \mathrm{Vect}\big(e_{\lambda_1}, \ldots, e_{\lambda_n}\big)$ *s'annule donc en* n *points (distincts). D'après* $P(n)$*, elle est donc nulle.*

     Cela montre que Φ *est injective.*
   - *Puisque* $\dim E = n = \dim \mathbb{R}^n$*, l'application* Φ *est un isomorphisme.*

7. Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on note $p_\lambda : \begin{cases} \mathbb{R}_+^* & \to \mathbb{R} \\ x & \mapsto x^\lambda. \end{cases}$

   Soit $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ distincts et $E = \mathrm{Vect}\big(p_{\lambda_1}, \ldots, p_{\lambda_n}\big)$. Soit $z_1, \ldots, z_n \in \mathbb{R}_+^*$ distincts.

   Montrer que l'application de multiévaluation $\Phi : \begin{cases} E \to & \mathbb{R}^n \\ f \mapsto & \big(f(z_1), \ldots, f(z_n)\big) \end{cases}$ est un isomorphisme.

   On remarque que, pour tout λ*, on a* $p_\lambda : x \mapsto \exp\big(\lambda \ln(x)\big) = e_\lambda(\ln x)$*.*

   En particulier, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ *et tous* $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$*, on a* $\displaystyle\sum_{k=1}^n \alpha_k\, p_{\lambda_k}(x) = \sum_{k=1}^n \alpha_k\, e_{\lambda_k}(\ln x)$*. Par bijectivité de* $\ln : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$*, cela signifie que les fonctions* $\displaystyle\sum_{k=1}^n \alpha_k\, p_{\lambda_k}$ *(définie sur* $\mathbb{R}_+^*$*) et* $\displaystyle\sum_{k=1}^n \alpha_k\, e_{\lambda_k}$ *(définie sur* $\mathbb{R}$*) possèdent exactement le même nombre de points d'annulation.*

   Ainsi, $\displaystyle\sum_{k=1}^n \alpha_k\, p_{\lambda_k}$ *est nulle ou s'annule au plus* $n-1$ *fois.*

   On peut alors recopier la démonstration de la question précédente pour montrer que Φ *est un isomorphisme.*

Partie II. Intermède : le *spark* d'une famille liée.

Soit E un espace vectoriel et $\mathscr{F} = (x_1, \ldots, x_n)$ une famille liée. On définit le *spark* de $\mathscr{F}$, que l'on notera spark($\mathscr{F}$), comme le plus petit entier s tel que $\mathscr{F}$ possède une sous-famille liée à s éléments.

8. Quelles sont les familles liées dont le spark vaut 1 ?

   La famille vide étant libre, le spark ne saurait être nul. Il vaut 1 *si et seulement si la famille possède une sous-famille liée à exactement un vecteur, c'est-à-dire si et seulement si* (0_E) *est une sous-famille de la famille de départ.*

   Ainsi, les familles de spark 1 *sont les familles contenant le vecteur nul.*

9. On note (e_1, e_2, e_3) la base canonique de K^3.

   Quel est le spark de la famille $\mathscr{F} = (e_1, e_2, e_3, e_1 + e_2, e_1 + e_3, e_2 + e_3)$?

   La relation de liaison non triviale $e_1 + e_2 - (e_1 + e_2) = 0_{K^3}$ *montre que* $\mathscr{F}$ *possède une sous-famille liée à trois vecteurs.*

   - *La famille* $\mathscr{F}$ *ne contient pas le vecteur nul, donc elle ne possède pas de famille liée à un vecteur.*
   - *On vérifie rapidement que les vecteurs de* $\mathscr{F}$ *ne sont pas colinéaires deux à deux, si bien que* $\mathscr{F}$ *ne possède pas de sous-famille liée de deux vecteurs.*

   Ainsi, $\mathrm{spark}(\mathscr{F}) = 3$.

10. Soit $\mathscr{F}$ une famille liée. Montrer que $\mathrm{spark}(\mathscr{F}) \leqslant \mathrm{rg}(\mathscr{F}) + 1$.

    Notons $r = \mathrm{rg}(\mathscr{F})$. *Si la famille possédait au plus* r *vecteurs, elle en posséderait nécessairement* r *et serait libre, ce qui est exclu.*

    La famille $\mathscr{F}$ *possède alors au moins* $r + 1$ *vecteurs, que l'on va noter* $v_1, \ldots, v_{r+1}$. *Ces vecteurs vivent dans* $\mathrm{Vect}(\mathscr{F})$, *sous-espace vectoriel de dimension* r, *donc ils ne peuvent pas former une famille libre.*

    On a ainsi montré que $\mathscr{F}$ *possédait une famille liée à* $r + 1$ *vecteurs, ce qui montre* $\mathrm{spark}\mathscr{F} \leqslant r + 1$.

11. Dans cette dernière question, on se place sur le corps $K = \mathbb{R}$ et on fixe $\Omega = \{z_1, \ldots, z_n\} \subseteq \mathbb{R}_+^*$ de cardinal n. On note alors $E = \mathbb{R}^\Omega$ l'espace vectoriel des fonctions $\Omega \to \mathbb{R}$.

    - Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on note $e_i : \Omega \to \mathbb{R}$ la fonction envoyant z_i sur 1 et les autres éléments de Ω sur 0. On pourra librement utiliser que $(e_1, \ldots, e_n)$ est une base de E.
    - Pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, on note $p_k : \Omega \to \mathbb{R}$ la fonction $z \mapsto z^k$.

    Montrer que le spark de $\mathscr{F} = (e_1, \ldots, e_n, p_0, \ldots, p_{n-1})$ est $n + 1$.

    Comme $(e_1, \ldots, e_n)$ *est une base de* E, *la famille* $\mathscr{F}$ *engendre* E, *donc elle est de rang* n. *D'après la question précédente, son spark est donc* $\leqslant n + 1$.

    Il reste à montrer que ce spark n'est pas $\leqslant n$, *c'est-à-dire que toute sous-famille* $\mathscr{G}$ *de* $\mathscr{F}$ *constituée de* n *éléments est libre. Considérons alors une telle famille, qui est la concaténation d'une sous-famille de* r *vecteurs de* $(e_1, \ldots, e_n)$ *et d'une sous-famille de* $s = n - r$ *vecteurs de* $(p_0, \ldots, p_{n-1})$.

    Plus précisément, il s'agit de la concaténation $\mathscr{G}$ *de* $\mathscr{G}_1 = (e_{i_1}, \ldots, e_{i_r})$ *(pour certains indices* $1 \leqslant i_1 < \cdots < i_r \leqslant n$ *; on en profite pour noter* $1 \leqslant j_1 < \cdots < j_s \leqslant n$ *les autres indices) et* $\mathscr{G}_2 = (p_{d_1}, \ldots, p_{d_s})$, *(pour certains degrés* $0 \leqslant d_1 < \cdots < d_s \leqslant n - 1$*).*

    Notons d'ores et déjà que, d'après la dernière question de la partie précédente, l'application de multiévaluation $\Phi : \begin{cases} \mathrm{Vect}(\mathscr{G}_2) \to & \mathbb{R}^s \\ \quad f \quad \mapsto & \big(f(z_{j_1}), \ldots, f(z_{j_s})\big) \end{cases}$ *est un isomorphisme. Cela montre au passage que* $\mathscr{G}_2$ *est de rang* s, *donc libre.*

Soit $\alpha_1, \dots, \alpha_r, \beta_1, \dots, \beta_s \in \mathbb{R}$ *tels que* $\alpha_1 e_{i_1} + \cdots + \alpha_r e_{i_r} + \beta_1 p_{d_1} + \cdots + \beta_s p_{d_s} = 0_E$.

Considérons $f = \underbrace{\alpha_1 e_{i_1} + \cdots + \alpha_r e_{i_r}}_{\in \mathrm{Vect}(\mathscr{G}_1)} = \underbrace{-\big(\beta_1 p_{d_1} + \cdots + \beta_s p_{d_s}\big)}_{\in \mathrm{Vect}(\mathscr{G}_2)}$.

- *Par définition, on a* $\Phi(e_{i_1}) = \cdots = \Phi(e_{i_r}) = 0$*, donc* $\Phi(f) = 0$*. Mais* $\Phi : \mathrm{Vect}(\mathscr{G}_2) \to \mathbb{R}^s$ *est un isomorphisme, donc* $f = 0$.
- *Par liberté de* $\mathscr{G}_1$ *(extraite de* $(e_1, \dots, e_n)$*), on en déduit déjà* $\alpha_1 = \cdots = \alpha_r = 0$.
- *Ainsi,* $\beta_1 p_{d_1} + \cdots + \beta_s p_{d_s} = 0_E$*. Par liberté de* $\mathscr{G}_2$*, on en déduit* $\beta_1 = \cdots = \beta_s = 0$.

Cela conclut la démonstration de la liberté de $\mathscr{G}$*, et donc de l'égalité* $\mathrm{spark}(\mathscr{F}) = n + 1$.

Partie III. Existence de multiévaluations surjectives, et deux applications.

On revient au cadre des sous-espaces vectoriels de K^Ω, pour un ensemble Ω quelconque.

12. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $\mathrm{Surj}(n)$ l'assertion

    Quel que soit le sous-espace vectoriel E de K^Ω de dimension au moins n, il existe $z_1, \dots, z_n \in \Omega$ tels que $\Phi : \begin{cases} E \to & K^n \\ f \mapsto & \big(f(z_1), \dots, f(z_n)\big) \end{cases}$ soit surjective.

    Montrer $\forall n \in \mathbb{N}^*, \mathrm{Surj}(n)$.

    On procède par récurrence.

    Initialisation. *Si* E *est un sous-espace vectoriel de* K^Ω *de dimension au moins* 1*, il possède un élément non nul* $f \in E$.

    Puisque cette fonction $f : \Omega \to K$ *n'est pas nulle, on peut trouver* $z_1 \in \Omega$ *tel que* $f(z_1) \neq 0$.

    Cela montre que la forme linéaire $\Phi = \text{év}_{z_1} : \begin{cases} E \to & K \\ f \mapsto & f(z_1) \end{cases}$ *n'est pas nulle, donc elle est surjective.*

    On a ainsi montré $\mathrm{Surj}(1)$.

    Hérédité. *Soit* $n \in \mathbb{N}^*$ *tel que* $\mathrm{Surj}(n)$*. Soit* E *un sous-espace vectoriel de* K^Ω *de dimension* $\geqslant n + 1$.

    En particulier, E *n'est pas un sous-espace vectoriel trivial donc, en réutilisant le raisonnement fait en initialisation, on peut trouver* $z_{n+1} \in \Omega$ *tel que* $\text{év}_{z_{n+1}} : E \to K$ *soit surjective (donc de rang* 1*).*

    D'après la formule du rang, la dimension du noyau $F = \ker \text{év}_{z_{n+1}} = \big\{ f \in E \,\big|\, f(z_{n+1}) \big\}$ *est alors* $\dim E - 1 \geqslant n$*. D'après* $\mathrm{Surj}(n)$*, on peut donc trouver* $z_1, \dots, z_n \in \Omega$ *tels que l'application* $\Phi : \begin{cases} F \to & K^n \\ f \mapsto & \big(f(z_1), \dots, f(z_n)\big) \end{cases}$ *soit surjective.*

    Vérifions alors que $\widetilde{\Phi} : \begin{cases} E \to & K^{n+1} \\ f \mapsto & \big(f(z_1), \dots, f(z_n), f(z_{n+1})\big) \end{cases}$ *est surjective.*

    Soit $\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \\ \lambda_{n+1} \end{pmatrix} \in K^{n+1}$.

    Comme $\text{év}_{z_{n+1}} : E \to K$ *est surjective, on peut trouver* $f_0 \in E$ *tel que* $f_0(z_{n+1}) = \lambda_{n+1}$.

    On peut par ailleurs trouver une fonction $f_1 \in F$ *tel que* $\Phi(f_1) = \begin{pmatrix} \lambda_1 - f_0(z_1) \\ \vdots \\ \lambda_n - f_0(z_n) \end{pmatrix}$*. Puisqu'elle appartient à* F*, cette fonction vérifie en outre* $f_1(z_{n+1}) = 0$.

On en déduit

$$\widetilde{\Phi}(f_0+f_1)=\widetilde{\Phi}(f_0)+\widetilde{\Phi}(f_1)=\begin{pmatrix}f_0(z_1)\\ \vdots\\ f_0(z_n)\\ \lambda_{n+1}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\lambda_1-f_0(z_1)\\ \vdots\\ \lambda_n-f_0(z_n)\\ 0\end{pmatrix}=\Lambda,$$

ce qui conclut.

13. **Première application : fonctions de module constant.** Dans cette application, le corps des scalaires est $K=\mathbb{C}$. Soit E un sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}^\Omega$ tel que, pour tout $f\in E$, la fonction réelle $|f| : t\mapsto |f(t)|$ soit constante.

    (a) Montrer que, pour tout sous-espace vectoriel de dimension finie F de E, on a $\dim F\leqslant 1$.

    Soit F *un sous-espace vectoriel de dimension finie de* E. *Supposons-le de dimension* $\geqslant 2$, *par l'absurde. D'après la question précédente, on pourrait trouver* $z, w\in\Omega$ *tels que* $\Phi : \begin{cases}F\to & K^2\\ f\mapsto & \big(f(z),f(w)\big)\end{cases}$ *soit un isomorphisme.*

    En particulier, il existe $f\in F$ *tel que* $f(z)=0$ *et* $f(w)=1$, *ce qui contredit l'hypothèse sur la constance de* $|f|$.

    (b) En déduire que E est de dimension finie et que $\dim E\leqslant 1$.

    Si E *est l'espace nul, on a terminé. On suppose donc que ça n'est pas le cas, et on fixe un vecteur non nul* $f\in E$.

    Pour tout nouveau vecteur $g\in E$, *le sous-espace vectoriel de dimension finie* $\mathrm{Vect}(f,g)$ *est nécessairement de dimension* $\leqslant 1$ *(et donc en fait* 1*), ce qui montre* $\mathrm{Vect}(f,g)=\mathrm{Vect}(f)$ *par inclusion et égalité des dimensions.*

    Ainsi, $\forall g\in E, g\in\mathrm{Vect}(f)$, *c'est-à-dire* $E=\mathrm{Vect}(f)$, *ce qui montre que* E *est de dimension* 1.

14. **Deuxième application : Sous-espaces invariants par translation.** Jusqu'à la fin du problème, le corps des scalaires est $K=\mathbb{R}$.

    Un sous-espace vectoriel E de $\mathbb{R}^\mathbb{R}$ est dit *invariant par translation* si, pour tout $f\in E$ et tout $a\in\mathbb{R}$, la fonction $x\mapsto f(x+a)$ appartient encore à E.

    Donner un exemple de sous-espace vectoriel (non trivial) de dimension finie de $\mathbb{R}^\mathbb{R}$ invariant par translation.

    Parmi d'autres exemples plus ou moins intéressants : $\mathbb{R}_n[X]$ *(identifié à un ensemble de fonctions) et le sous-espace vectoriel* $\mathrm{Vect}(\cos,\sin)$ *des solutions de l'équation de l'oscillateur harmonique conviennent. Pour ce dernier, il faut penser à utiliser les formules d'addition.*

15. On fixe dans les deux prochaines questions un sous-espace vectoriel E de l'espace $D^1(\mathbb{R})$ des fonctions dérivables et on suppose E de dimension finie et non trivial. On va montrer qu'il est alors automatiquement stable par dérivation.

    On suppose E invariant par translation et on note $n=\dim E$.

    D'après $\mathrm{Surj}(n)$, on peut trouver n scalaires $z_1,\dots,z_n\in\mathbb{R}$ tels que $\Phi : \begin{cases}E\to & \mathbb{R}^n\\ f\mapsto & \big(f(z_1),\dots,f(z_n)\big)\end{cases}$ soit surjective.

    Montrer qu'il existe n fonctions $g_1,\dots,g_n\in E$ telles que $\forall f\in E, f=\displaystyle\sum_{k=1}^{n} f(z_k)\,g_k$.

    Comme E *est de dimension* n, *l'application* $\Phi : E\to\mathbb{R}^n$ *est même un isomorphisme.*

On peut notamment trouver (ici, la surjectivité suffit) pour tout $k \in [\![1,n]\!]$ *une fonction* g_k *telle que* $\Phi(g_k)$ *soit le* k*-ième vecteur de la base canonique, c'est-à-dire que* $\forall \ell \in [\![1,n]\!], g_k(z_\ell) = \mathbb{1}_{(k=\ell)}$.

Les fonctions f *et* $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} f(z_k)\, g_k$ *sont alors deux éléments de* E *possédant les mêmes valeurs en* $z_1, \dots, z_n$*, c'est-à-dire la même image par* Φ.

L'injectivité de ce dernier donne donc l'égalité demandée.

16. Soit $f \in E$.

    (a) Soit $x, t \in \mathbb{R}$. Montrer $f(x+t) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} f(z_k + t)\, g_k(x)$.

    La fonction $f_t : x \mapsto f(x+t)$ *appartient à* E*, d'après l'hypothèse d'invariance par translation. En lui appliquant la question précédente, on obtient* $f_t = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} f(z_k+t) g_k$*, et il n'y a plus qu'à évaluer en* x.

    (b) En déduire $f' \in E$.

    Fixons $x \in \mathbb{R}$.

    Les fonctions $t \mapsto f(x+t)$ *et* $t \mapsto \displaystyle\sum_{k=1}^{n} f(z_k+t)\, g_k(x)$ *sont dérivables (par opérations) et égales, donc elles ont la même dérivée. Cela signifie que, pour tout* $t \in \mathbb{R}$, $f'(x+t) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} f'(z_k+t)\, g_k(x)$.

    En particulier, pour $t = 0$*, on a* $f'(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} f'(z_k)\, g_k(x)$*. Cette égalité étant vraie pour tout* $x \in \mathbb{R}$*, elle montre que* $f' = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} f'(z_k)\, g_k \in \mathrm{Vect}(g_1, \dots, g_n) = E$.

17. **Généralisation.** Soit E un sous-espace vectoriel de dimension finie de $C^0(\mathbb{R})$ invariant par translation. Montrer que $E \subseteq C^\infty(\mathbb{R})$ et que E est stable par dérivation.

    On a un opérateur de dérivation $\widetilde{D} : C^1(\mathbb{R}) \to C^0(\mathbb{R})$*, qui est surjectif d'après le résultat admis, et dont le noyau est précisément la droite des fonctions constantes.*

    En notant $\widehat{E} = \left\{ f \in C^1(\mathbb{R}) \,\middle|\, f' \in E \right\} = \widetilde{D}^{-1}[E]$*, on obtient ainsi un sous-espace vectoriel de* $C^1(\mathbb{R})$ *(et donc de* $D^1(\mathbb{R})$*). L'opérateur* $\widetilde{D}$ *induit une application linéaire* $\widehat{D} : \widehat{E} \to E$.

    - *Une fonction constante a pour dérivée la fonction nulle, qui appartient à* E *: on en déduit que l'image réciproque* $\widehat{E}$ *contient les fonctions constantes.*
    - *Si* $g \in \widehat{E}$ *et* $a \in \mathbb{R}$*, la fonction* $g_a : x \mapsto g(x+a)$ *est encore dérivable, de dérivée* $g'_a : x \mapsto g'(x+a)$*. Comme* $g' \in E$ *et que* E *est stable par translation, on a* $g'_a \in E$ *et donc* $g_a \in \widehat{E}$ *: l'espace vectoriel* $\widehat{E}$ *est encore stable par translation.*
    - *Reste à montrer que* $\widehat{E}$ *est de dimension finie. Fixons pour cela une base* $(f_1, \dots, f_n)$ *de* E *et considérons pour tout* $k \in [\![1,n]\!]$*, une primitive* g_k *de* f_k *(qui appartiendra nécessairement à* $\widehat{E}$*).*

      Étant donné $g \in \widehat{E}$*, on a alors* $g' \in E$*, donc il existe* $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ *tels que* $g' = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \alpha_k f_k$*. Cela signifie que les fonctions* g *et* $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \alpha_k\, g_k$ *ont la même dérivée, et que leur différence est donc constante.*

Cela montre qu'il existe $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ *tel que* $g = \lambda_0 + \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \, g_k$.

On a ainsi montré $\widehat{E} = \mathrm{Vect}(1, g_1, \ldots, g_n)$*, ce qui achève la démonstration du fait que* $\widehat{E}$ *est un sous-espace vectoriel de dimension finie.*

D'après la question précédente, $\widehat{E}$ *est un sous-espace vectoriel de dimension finie de* $D^1(\mathbb{R})$ *stable par translation, donc il est stable par dérivation.*

Pour tout $g \in \widehat{E}$*, la fonction* $g' \in \widehat{E}$ *est donc encore dérivable, ce qui montre que* g *est deux fois dérivable. Mais on a alors* $g'' \in \widehat{E}$*, donc* g'' *est deux fois dérivable, et* g *est donc trois fois dérivable.*

Une récurrence facile basée sur cette idée (dite de bootstrap*) montre ainsi que tous les éléments de* $\widehat{E}$ *sont lisses.*

Par dérivation, il en va donc de même de ceux de E*, et on peut appliquer la question précédente, cette fois à* E *lui-même, pour obtenir que* E *est stable par dérivation.*