Huitième composition de mathématiques [corrigé]

Exercice 1. Quelques intégrales.

1. Calculer $\displaystyle\int_1^4 e^{-\sqrt{x}}\,dx$.

   On a

$$\begin{aligned}\int_1^4 e^{-\sqrt{x}}\,dx &= \int_1^2 e^{-u}\,2u\,du && \begin{bmatrix} x=u^2 \\ dx = 2u\,du \\ u\mapsto u^2 \textit{ de classe } C^1\end{bmatrix}\\ &= 2\left(\left[-u\,e^{-u}\right]_{u=1}^2 + \int_1^2 e^{-u}\,du\right) && (u\mapsto u \textit{ et } u\mapsto e^{-u} \textit{ de classe } C^1)\\ &= 2\left(-2\,e^{-2}+e^{-1}\right) + 2\,\left[-e^{-u}\right]_{u=1}^2\\ &= -4e^{-2}+2e^{-1}+2\left(-e^{-2}+e^{-1}\right)\\ &= 4e^{-1}-6e^{-2}.\end{aligned}$$

2. Calculer $\displaystyle\int_0^\pi \sin(2t)\,e^{\cos(t)}\,dt$.

   Le point-clef est la formule de trigonométrie $\forall t\in\mathbb{R}, \sin(2t) = 2\sin(t)\,\cos(t)$, *donc l'intégrale vaut*

$$I = 2\int_0^\pi \sin(t)\,\cos(t)\,e^{\cos(t)}\,dt.$$

   À partir de là, plusieurs possibilités s'offrent à nous.

   Intégration par parties. *On remarque que la dérivée de* $u : t\mapsto e^{\cos(t)}$ *est* $u' : t\mapsto -\sin(t)\,e^{\cos(t)}$, *donc*

$$\begin{aligned}I &= 2\int_0^\pi -u'(t)\,\cos(t)\,dt\\ &= 2\left(\left[-u(t)\,\cos(t)\right]_{t=0}^\pi - \int_0^\pi -u(t)\,(-\sin(t))\,dt\right) && (u \textit{ et } -\cos \textit{ sont de classe } C^1)\\ &= 2\left(\left[-e^{\cos(t)}\,\cos(t)\right]_{t=0}^\pi - \int_0^\pi e^{\cos(t)}\,\sin(t)\,dt\right)\\ &= 2\left(\left(e^{-1}+e^1\right) - \left[-e^{\cos(t)}\right]_{t=0}^\pi\right)\\ &= 2\left(\left(e^{-1}+e\right) - \left(-e^{-1}+e^1\right)\right),\\ &= \frac{4}{e}.\end{aligned}$$

   Changement de variables. *On a*

$$\begin{aligned}I &= 2\int_0^\pi \sin(t)\,\cos(t)\,e^{\cos(t)}\,dt\\ &= -2\int_e^{1/e} \ln u\,du && \begin{bmatrix} u = e^{\cos(t)} \\ du = -\sin(t)\,e^{\cos(t)}\,dt \\ \exp\circ\cos \textit{ est de classe } C^1\end{bmatrix}\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= 2\int_{1/e}^{e} \ln u \, du \\
&= 2\left[u \ln u - u\right]_{u=1/e}^{e} \\
&= 2\left((e \times 1 - e) - \left(\frac{1}{e} \times (-1) - \frac{1}{e}\right)\right) \\
&= \frac{4}{e}.
\end{aligned}
$$

Changement de variables puis intégration par parties. *On a*

$$
\begin{aligned}
I &= 2\int_0^{\pi} \sin(t)\,\cos(t)\,e^{\cos(t)}\,dt \\
&= -2\int_1^{-1} u\,e^u\,du && \begin{bmatrix} u = \cos(t) \\ du = -\sin(t)\,dt \\ \cos \textit{ est de classe } C^1 \end{bmatrix} \\
&= 2\int_{-1}^{1} u\,e^u\,du \\
&= 2\left(\left[u\,e^u\right]_{u=-1}^{1} - \int_{-1}^{1} e^u\,du\right) && (u \mapsto u \textit{ et } \exp \textit{ sont de classe } C^1) \\
&= 2\left(\left(e^1 + e^{-1}\right) - \left[e^u\right]_{u=-1}^{1}\right) \\
&= 2\left(\left(e^1 + e^{-1}\right) - \left(e^1 - e^{-1}\right)\right) \\
&= \frac{4}{e}.
\end{aligned}
$$

3. On définit par récurrence la suite $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par

$$d_0 = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, d_{n+1} = (n+1)d_n + (-1)^{n+1}.$$

   (a) Calculer d_0, d_1, d_2, d_3 et d_4.

   On obtient les premières valeurs suivantes.

n	0	1	2	3	4
d_n	1	0	1	2	9

   (b) Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \int_0^1 t^n\,e^t\,dt = (-1)^n\left[d_n e - n!\right]$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $P(n)$ l'assertion $\int_0^1 t^n\,e^t\,dt = (-1)^n\left[d_n e - n!\right]$.

Montrons $\forall n \in \mathbb{N}, P(n)$ par récurrence.

Initalisation. *On a*

$$
\begin{aligned}
\int_0^1 t^0\,e^t\,dt &= \int_0^1 e^t\,dt \\
&= \left[e^t\right]_{t=0}^{1} \\
&= e - 1 \\
&= (-1)^0\left(d_0\,e - 0!\right),
\end{aligned}
$$

ce qui démontre $P(0)$.

Hérédité. *Soit* $n \in \mathbb{N}$ *tel que* $P(n)$.

On a alors, par intégration par parties (appliquée aux fonctions $t \mapsto t^{n+1}$ *et* $\exp$*, lisses donc de classe* C^1*).*

$$\begin{aligned}
\int_0^1 t^{n+1}\, e^t \, dt &= \left[t^{n+1}\, e^t\right]_{t=0}^1 - (n+1) \int_0^1 t^n \, e^t \, dt \\
&= (e-0) - (n+1)\left((-1)^n \left[d_n e - n!\right]\right) && \textit{(d'après } P(n)\textit{)} \\
&= e + (-1)^{n+1}(n+1) d_n e + (-1)^n (n+1) n! \\
&= (-1)^{n+1}\left[(-1)^{n+1} e + (n+1) d_n e\right] + (-1)^n (n+1)! \\
&= (-1)^{n+1}\left[\left((n+1) d_n + (-1)^{n+1}\right) e - (n+1)!\right] \\
&= (-1)^{n+1}\left[d_{n+1} e - (n+1)!\right],
\end{aligned}$$

ce qui montre $P(n+1)$ *et clôt la récurrence.*

(c) En déduire que $d_n = \dfrac{n!}{e} + \underset{n \to +\infty}{o}(1)$.

On utilise la positivité de l'intégration : la fonction $t \mapsto t^n \, e^t$ *est positive sur* $[0, 1]$*, donc*

$$\int_0^1 t^n \, e^t \, dt \geqslant 0.$$

D'un autre côté, on a $\forall t \in [0,1]\,, e^t \leqslant e$*, donc* $\forall t \in [0,1]\,, t^n \, e^t \leqslant e\, t^n$*, donc*

$$\int_0^1 t^n \, e^t \, dt \leqslant \int_0^1 e\, t^n \, dt = \frac{e}{n+1}.$$

Ainsi, on a $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leqslant \displaystyle\int_0^1 t^n \, e^t \, dt \leqslant \frac{e}{n+1}$ *et le théorème des gendarmes entraîne*

$$\int_0^1 t^n \, e^t \, dt \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0.$$

Cela entraîne $d_n e - n! \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$*, c'est-à-dire* $d_n = \dfrac{n!}{e} + o(1)$.

Problème. Théorème de Hartwig, Putcha et Wu (1990).

Dans tout le problème, le corps K des scalaires est $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. La lettre E désignera toujours un K-espace vectoriel de dimension finie. On notera systématiquement n la dimension de E, que l'on supposera non nulle.

Le but du problème est de caractériser les endomorphismes $f \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$ qui peuvent s'écrire comme somme de projecteurs. L'énoncé précis est donné au début de la troisième partie.

Partie I. Trace d'un endomorphisme.

1. Soit $f \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$. On se donne deux bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ de E et l'on note $\mathrm{P} = \mathrm{P}_{\mathscr{B}\to\mathscr{B}'}$ la matrice de passage de $\mathscr{B}$ vers $\mathscr{B}'$.
   (a) Rappeler sans démonstration le lien entre les matrices $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$ et $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(f)$.

   On a $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(f) = \mathrm{P}^{-1}\ \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)\,\mathrm{P}$.

   (b) En déduire l'égalité $\mathrm{tr}\big(\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)\big) = \mathrm{tr}\big(\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(f)\big)$.

   Par cyclicité de la trace :

$$\mathrm{tr}\big(\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(f)\big) = \mathrm{tr}\big(\mathrm{P}^{-1}\ \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)\,\mathrm{P}\big) = \mathrm{tr}\big(\mathrm{P}\mathrm{P}^{-1}\ \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)\big) = \mathrm{tr}\big(\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)\big).$$

La quantité $\mathrm{tr}\big(\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)\big)$ ne dépend donc pas du choix de la base $\mathscr{B}$. Dans la suite du problème, on l'appellera *trace* de l'endomorphisme f, et on la notera simplement $\mathrm{tr}(f)$.

Cela définit une application $\mathrm{tr} : \mathscr{L}(\mathrm{E}) \to \mathrm{K}$.

2. (a) Montrer que $\mathrm{tr} : \mathscr{L}(\mathrm{E}) \to \mathrm{K}$ est une application linéaire.

   Fixons une base $\mathscr{B}$ *de* E.
   On obtient $\mathrm{tr} : \mathscr{L}(\mathrm{E}) \to \mathrm{K}$ *en composant* $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}} : \mathscr{L}(\mathrm{E}) \to \mathrm{M}_n(\mathrm{K})$ *et* $\mathrm{tr} : \mathrm{M}_n(\mathrm{K}) \to \mathrm{K}$.
   Le cours garantissant que ces deux applications sont linéaires (la première est même un isomorphisme), il en va de même de leur composée.

   (b) Déterminer la dimension de son noyau.

   Sous-espace vectoriel de K, *l'image de* $\mathrm{tr} : \mathscr{L}(\mathrm{E}) \to \mathrm{K}$ *est de dimension* $\leqslant 1$.
   Comme $\mathrm{tr}(\mathrm{I}_n) = n > 0$, *cette image est un sous-espace vectoriel non trivial de* K, *ce qui force* $\mathrm{im}(\mathrm{tr}) = \mathrm{K}$ *(par inclusion et égalité des dimensions), donc* $\mathrm{rg}(\mathrm{tr}) = 1$.
   D'après le théorème du rang, on a donc $\dim\ker(\mathrm{tr}) = \dim\mathscr{L}(\mathrm{E}) - \mathrm{rg}(\mathrm{tr}) = n^2 - 1$.

3. Soit $\lambda \in \mathrm{K}$. Calculer la trace de l'homothétie $\lambda\ \mathrm{id}_{\mathrm{E}}$.

   Soit $\mathscr{B}$ *une base quelconque de* E. *On a*

$$\mathrm{tr}\big(\lambda\ \mathrm{id}_{\mathrm{E}}\big) = \mathrm{tr}\left(\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}\big(\lambda\ \mathrm{id}_{\mathrm{E}}\big)\right) = \mathrm{tr}\big(\lambda\,\mathrm{I}_n\big) = \lambda n.$$

4. Montrer que l'application

$$f : \begin{cases} \mathrm{K}_3[\mathrm{X}] \to & \mathrm{K}_3[\mathrm{X}] \\ \quad \mathrm{P} & \mapsto (1+3\mathrm{X})\mathrm{P} - \mathrm{X}^2\mathrm{P}' \end{cases}$$

   est un endomorphisme bien défini, et déterminer sa trace.

- *La linéarité de* f *ne pose pas de problème (à ceci près que, pour le moment, on ne sait pas que* f *est bien définie, c'est-à-dire que* $\forall P \in K_3[X], (3X+1)P - X^2P' \in K_3[X]$*).*
  Si l'on veut être plus formel, l'application $\widetilde{f} : \begin{cases} K_3[X] \to & K[X] \\ P & \mapsto (1+3X)P - X^2P' \end{cases}$ *est bien définie et linéaire, et il s'agit simplement de montrer que* $K_3[X]$ *est stable sous* $\widetilde{f}$*.*
- *On a*
  - $f(1) = (1+3X) - 0 = 1 + 3X \in \mathbb{R}_3[X]$;
  - $f(X) = (X+3X^2) - X^2 = X + 2X^2 \in \mathbb{R}_3[X]$;
  - $f(X^2) = (X^2+3X^3) - 2X^3 = X^2 + X^3 \in \mathbb{R}_3[X]$;
  - $f(X^3) = (X^3+3X^4) - 3X^4 = X^3 \in \mathbb{R}_3[X]$.

  Par linéarité, on en déduit que $\forall P \in K_3[X] = \mathrm{Vect}(1, X, X^2, X^3), f(P) \in K_3[X]$.
- *Les calculs du point précédent permettent de déterminer la matrice de* f *dans la base canonique* $\mathscr{B}_c = (1, X, X^2, X^3)$ *de* $K_3[X]$*. On a alors*

$$\mathrm{tr}(f) = \mathrm{tr}\big(\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_c}(f)\big) = \mathrm{tr}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 4.$$

5. Soit $p \in \mathscr{L}(E)$ un projecteur.

   (a) Construire une base $\mathscr{B} = (u_1, \dots, u_n)$ de E et un entier $r \in [\![0, n]\!]$ tels que

$$\forall j \in [\![1, n]\!], p(u_j) = \begin{cases} u_j & \text{si } j \leqslant r \\ 0_E & \text{si } j > r. \end{cases}$$

   Comme p *est un projecteur, on sait que son noyau et son image sont supplémentaires.*
   - *En notant* $r = \mathrm{rg}(p)$*, on peut fixer une base* $(u_1, \dots, u_r)$ *de* $\mathrm{im}\, p$*.*
     Comme $\mathrm{im}(p) = E_1(p)$*, il vient* $\forall j \in [\![1, r]\!], p(u_j) = u_j$*.*
   - *Comme* $\ker(p)$ *est un supplémentaire de* $\mathrm{im}(p)$*, il s'agit d'un sous-espace vectoriel de* E *de dimension* $n - p$*. On peut alors en fixer une base* $(u_{r+1}, \dots, u_n)$*.*
     Par définition du noyau, $\forall j \in [\![r+1, n]\!], p(u_j) = 0_E$*.*
   - *En concaténant ces deux familles, on obtient une base de* E *possédant la propriété voulue.*

   (b) En déduire $\mathrm{tr}(p) = \mathrm{rg}(p)$.

   On déduit de la question précédente

$$\mathrm{tr}(p) = \mathrm{tr}\big(\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(p)\big) = \mathrm{tr}\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = r = \mathrm{rg}(p).$$

6. Soit $f \in \mathscr{L}(E)$.

   (a) Montrer $f^2 = 0_{\mathscr{L}(E)}$ si et seulement si $\mathrm{im}(f) \subseteq \ker(f)$.

   Sens direct. *Supposons* $f^2 = 0_{\mathscr{L}(E)}$*.*
   Soit $y \in \mathrm{im}(f)$*. On peut donc trouver* $x \in E$ *tel que* $y = f(x)$*.*
   Il vient alors $f(y) = f^2(x) = 0_E$*, donc* $y \in \ker(f)$*.*

   Sens réciproque. *Supposons* $\mathrm{im}(f) \subseteq \ker(f)$*.*
   Soit $x \in E$*. On a* $f(x) \in \mathrm{im}(f)$*, donc* $\mathrm{im}(f) \in \ker(f)$*, donc* $f^2(x) = f\big(f(x)\big) = 0_E$*.*
   Cela montre $f^2 = 0_{\mathscr{L}(E)}$*.*

(b) On suppose $f^2 = 0_{\mathscr{L}(E)}$ et l'on note $r = \mathrm{rg}(f)$.
Construire une famille $(u_1, \dots, u_r)$ de vecteurs de E telle que
- ► $E = \mathrm{Vect}(u_1, \dots, u_r) \oplus \ker(f)$;
- ► la famille $\big(f(u_1), \dots, f(u_r)\big)$ soit une famille libre de $\ker(f)$.

Soit S *un supplémentaire de* $\ker(f)$.
D'après le théorème du rang, f *induit un isomorphisme* $\varphi : S \to \mathrm{im}(f)$. *En particulier,* $\dim S = r$.
On peut donc fixer une base $(u_1, \dots, u_r)$ *de* S.
Cela donne déjà $\mathrm{Vect}(u_1, \dots, u_r) \oplus \ker(f) = S \oplus \ker(f) = E$.
Comme φ *est un isomorphisme, la famille* $\big(f(u_1), \dots, f(u_r)\big) = \big(\varphi(u_1), \dots, \varphi(u_r)\big)$ *est une base de* $\mathrm{im}(f)$. *Comme* $\mathrm{im}(f) \subseteq \ker(f)$ *d'après la question précédente, il s'agit bien d'une famille libre de* $\ker(f)$, *ce qui conclut.*

(c) En déduire que si $f^2 = 0_{\mathscr{L}(E)}$, alors $\mathrm{tr}(f) = 0$.

Supposons $f^2 = 0_{\mathscr{L}(E)}$ *et gardons les notations de la question précédente. On peut compléter la famille* $\big(f(u_1), \dots, f(u_r)\big)$ *en une base* $\big(f(u_1), \dots, f(u_r), v_1, \dots, v_s\big)$ *de* $\ker(f)$.
Par concaténation, $\mathscr{B} = \big(u_1, \dots, u_r, f(u_1), \dots, f(u_r), v_1, \dots, v_s\big)$ *est une base de* E. *Dans cette base, on a*

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0_r & 0_r & 0 \\ I_r & 0_r & 0 \\ 0 & 0 & 0_s \end{pmatrix},$$

donc $\mathrm{tr}(f) = \mathrm{tr}\big(\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)\big) = 0$, *car tous les coefficients diagonaux de cette matrice sont nuls.*

Partie II. Lemme (faible) de Fillmore.

7. Soit $g \in \mathscr{L}(E)$. On suppose que pour tout $x \in E$, la famille $\big(x, g(x)\big)$ est liée.
Soit $\mathscr{B} = \big(u_1, \dots, u_n\big)$ une base quelconque de E.

(a) Montrer que la matrice $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(g)$ est diagonale.

Soit $j \in [\![1, r]\!]$. *Comme* $u_j \neq 0_E$ *(car il figure dans une base), le caractère lié de* $\big(u_j, g(u_j)\big)$ *entraîne que* $g(u_j) \in \mathrm{Vect}(u_j)$ *: on peut donc trouver* $\lambda_j \in K$ *tel que* $g(u_j) = \lambda_j u_j$.
Ainsi, $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(g) = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$.

(b) En considérant le vecteur $u_1 + \dots + u_n$, montrer que la matrice $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(g)$ est scalaire.
Qu'en déduit-on sur g ?

D'une part, l'argument de la question précédente et la non-nullité de $u_1 + \dots + u_n$ *montrent l'existence d'un scalaire* $\sigma \in K$ *tel que* $g(u_1 + \dots + u_n) = \sigma(u_1 + \dots + u_n) = \sigma u_1 + \dots + \sigma u_n$.
De l'autre, par linéarité, $g(u_1 + \dots + u_n) = \lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_n u_n$.
Par liberté de $\mathscr{B}$, *on en déduit* $\forall j \in [\![1, n]\!], \lambda_j = \sigma$.
Ainsi, $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(g) = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \sigma I_n$ *: la matrice de* g *est scalaire.*
On en déduit que $g = \sigma\, \mathrm{id}_E$ *est une homothétie.*

8. Soit $g \in \mathscr{L}(E)$ qui ne soit pas une homothétie. En utilisant judicieusement la question précédente, montrer qu'il existe une base $\mathscr{B}$ de E telle que le coefficient $(1, 1)$ de la matrice $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(g)$ soit nul.

La question précédente a montré que si, pour tout $x \in E$, *la famille* $\big(x, g(x)\big)$ *est liée, alors* g *est une homothétie.*
Comme g *n'est pas une homothétie, par contraposée, on peut trouver* $x \in E$ *tel que* $\big(x, g(x)\big)$ *soit libre.*
En notant $u_1 = x$ *et* $u_2 = g(x)$, *on peut alors compléter la famille* (u_1, u_2) *en une base* $\mathscr{B}$ *de* E.
Le fait que $g(u_1) = u_2$ *montre que la première colonne de* $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(g)$ *est le deuxième vecteur* e_2 *de la base canonique.* A fortiori, $[\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(g)]_{1,1} = 0$.

9. Soit $g \in \mathscr{L}(E)$ qui ne soit pas une homothétie et $\tau \in K$. Montrer qu'il existe une base $\mathscr{B}$ de E telle que le coefficient $(1,1)$ de la matrice $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(g)$ vaille τ.

   Comme g n'est pas une homothétie, $g - \tau\, \mathrm{id}_E$ n'en est pas non plus une. D'après la question précédente, on peut trouver une base $\mathscr{B}$ de E telle que $[\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(g - \tau\, \mathrm{id}_E)]_{1,1} = 0$.
   On en déduit $[\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(g)]_{1,1} = \tau$.

Remarque. *Le lemme de Fillmore (1969) affirme quelque chose de plus fort : étant donné $g \in \mathscr{L}(E)$ qui n'est pas une homothétie et $\tau_1, \dots, \tau_n \in K$ tels que $\tau_1 + \cdots + \tau_n = \mathrm{tr}(g)$, il est possible de trouver une base $\mathscr{B}$ telle que les coefficients diagonaux de $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(g)$ soient $\tau_1, \dots, \tau_n$.*

La question précédente est en fait l'amorce d'une démonstration par récurrence du lemme de Fillmore : il faut simplement être un peu soigneux pour justifier qu'il est possible d'exiger également (quitte à modifier un peu la base $\mathscr{B}$) que le bloc sud-est de la matrice $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(g)$, qui est de format $(n-1) \times (n-1)$, soit lui-même non scalaire. C'est un bon exercice (et le cas particulier « toute matrice de trace nulle est semblable à une matrice de diagonale nulle » est un grand classique).

Partie III. Théorème HPW : sens facile et un corollaire.

La fin du problème a pour but de démontrer le théorème suivant.

Théorème HPW.

Soit $f \in \mathscr{L}(E)$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

(C1) Il existe un entier naturel $m \in \mathbb{N}$ et des projecteurs $p_1, \dots, p_m \in \mathscr{L}(E)$ tels que $f = \sum_{k=1}^{m} p_k$.

(C2) La trace $\mathrm{tr}(f)$ est un entier, et $\mathrm{tr}(f) \geqslant \mathrm{rg}(f)$.

10. Soit $g_1, g_2 \in \mathscr{L}(E)$.

    (a) Montrer $\mathrm{rg}(g_1 + g_2) \leqslant \mathrm{rg}(g_1) + \mathrm{rg}(g_2)$.

    - *On montre par rédaction automatique $\mathrm{im}(g_1 + g_2) \subseteq \mathrm{im}(g_1) + \mathrm{im}(g_2)$.*
      Soit $y \in \mathrm{im}(g_1 + g_2)$.
      On peut donc trouver $x \in E$ tel que $y = (g_1 + g_2)(x) = g_1(x) + g_2(x) \in \mathrm{im}(g_1) + \mathrm{im}(g_2)$.
    - *D'après la formule de Grassmann, étant donné deux sous-espaces vectoriels F et G de E, on a $\dim(F + G) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G) \leqslant \dim F + \dim G$. Ainsi,*

    $$\mathrm{rg}(g_1 + g_2) \leqslant \dim\big(\mathrm{im}\, g_1 + \mathrm{im}\, g_2\big) \leqslant \mathrm{rg}(g_1) + \mathrm{rg}(g_2).$$

    (b) Montrer $\mathrm{rg}(g_1 + g_2) = \mathrm{rg}(g_1) + \mathrm{rg}(g_2) \Leftrightarrow \mathrm{im}(g_1 + g_2) = \mathrm{im}(g_1) \oplus \mathrm{im}(g_2)$.

    D'après le raisonnement précédent, $\mathrm{rg}(g_1+g_2) = \mathrm{rg}(g_1)+\mathrm{rg}(g_2)$ si et seulement si les deux inégalités utilisées plus haut sont en fait des égalités, c'est-à-dire si et seulement si l'on a simultanément $\mathrm{im}(g_1 + g_2) = \mathrm{im}(g_1) + \mathrm{im}(g_2)$ et $\dim(\mathrm{im}(g_1) \cap \mathrm{im}(g_2)) = 0$.
    La deuxième inégalité signifie simplement que $\mathrm{im}(g_1)$ et $\mathrm{im}(g_2)$ sont en somme directe, donc on peut reformuler ces deux conditions en l'unique condition $\mathrm{im}(g_1 + g_2) = \mathrm{im}(g_1) \oplus \mathrm{im}(g_2)$.

11. Montrer l'implication **(C1)** $\Rightarrow$ **(C2)**.

    *Supposons **(C1)**.*

    On peut donc trouver $m \in \mathbb{N}$ et des projecteurs $p_1, \dots, p_m \in \mathscr{L}(E)$ tels que $f = \sum_{k=1}^{m} p_k$.

- *On a déjà, par linéarité de la trace et d'après la question 5b,*

$$\mathrm{tr}(f) = \sum_{k=1}^{m} \mathrm{tr}(p_k) = \sum_{k=1}^{m} \mathrm{rg}(p_k) \in \mathbb{N}.$$

- *Par ailleurs, la question précédente et une récurrence immédiate montrent* $\mathrm{rg}\left(\sum_{k=1}^{m} p_k\right) \leqslant \sum_{k=1}^{m} \mathrm{rg}(p_k)$.

  On en déduit

$$\mathrm{tr}(f) = \sum_{k=1}^{m} \mathrm{rg}(p_k) \geqslant \mathrm{rg}\left(\sum_{k=1}^{m} p_k\right) = \mathrm{rg}(f),$$

  ce qui conclut.

12. Dans cette question, on admet le théorème HPW. Soit $f \in \mathscr{L}(E)$.
    Donner une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe un entier naturel $m \in \mathbb{N}$, des projecteurs $p_1, \ldots, p_m \in \mathscr{L}(E)$ et des signes $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_m \in \{\pm 1\}$ tels que $f = \sum_{k=1}^{m} \varepsilon_k\, p_k$.

    Remarquons qu'en termes un peu plus relâchés, la question demande de caractériser les différences $g - h$, *où* $g, h \in \mathscr{L}(E)$ *sont des sommes de projecteurs. On va montrer qu'il s'agit exactement des endomorphismes dont la trace est un entier relatif.*

    Sens direct. *Supposons* g *et* h *sommes de projecteurs. D'après la question précédente,* $\mathrm{tr}(g), \mathrm{tr}(h) \in \mathbb{N}$, *donc* $\mathrm{tr}(g - h) = \mathrm{tr}(g) - \mathrm{tr}(h) \in \mathbb{Z}$.

    Sens récipoque. *Supposons* $\mathrm{tr}(f) \in \mathbb{Z}$. *Pour* $q \in \mathbb{N}$ *suffisamment grand,* $\mathrm{tr}(f + q\ \mathrm{id}_E) = \mathrm{tr}(f) + qn$ *est un entier naturel* $\geqslant n$. *En particulier,* $\mathrm{tr}(f + q\ \mathrm{id}_E) \in \mathbb{N}$ *et* $\mathrm{tr}(f + q\ \mathrm{id}_E) \geqslant \mathrm{rg}(f + q\ \mathrm{id}_E)$.
    D'après le théorème HPW, $f + q\ \mathrm{id}_E$ *est donc une somme de projecteurs. Comme* $q\ \mathrm{id}_E$ *est clairement une somme de projecteurs, la décomposition* $f = \big(f + q\ \mathrm{id}_E\big) - q\ \mathrm{id}_E$ *montre que* f *est bel et bien la différence de deux sommes de projecteurs.*

Partie IV. *Rech. proj. pour proj. priv.*

Soit $f \in \mathscr{L}(E)$. Un projecteur $p \in \mathscr{L}(E)$ sera dit *privilégié* pour f si le rang de p vaut 1 et que l'on a la décomposition $\mathrm{im}(f) = \mathrm{im}(p) \oplus \mathrm{im}(f - p)$.

13. Soit $p \in \mathscr{L}(E)$ un projecteur de rang 1. On suppose $\mathrm{im}(p) \subseteq \mathrm{im}(f)$ et que les sous-espaces vectoriels $\mathrm{im}(p)$ et $\mathrm{im}(f - p)$ sont en somme directe.
    Montrer que p est un projecteur privilégié pour f.

    Il s'agit donc de montrer que $\mathrm{im}(f) = \mathrm{im}(p) + \mathrm{im}(f - p)$.

    - *L'égalité* $f = p + (f - p)$ *montre déjà l'inclusion directe, comme à la question 10a.*
    - *On a par hypothèse l'inclusion* $\mathrm{im}(p) \subseteq \mathrm{im}(f)$.
      L'égalité $f - p = f + (-p)$ *montre alors l'inclusion*

$$\mathrm{im}(f - p) \subseteq \mathrm{im}(f) + \mathrm{im}(-p) = \mathrm{im}(f) + \mathrm{im}(p) = \mathrm{im}(f).$$

      Par propriété de la somme, on en déduit l'inclusion réciproque $\mathrm{im}(p) + \mathrm{im}(f - p) \subseteq \mathrm{im}(f)$.

14. Dans cette question, on suppose qu'il existe une base $\mathscr{B} = (u_1, \ldots, u_n)$ de E telle que $u_1 \in \mathrm{im}(f)$ et $f(u_1) - u_1 \in \mathrm{Vect}\big(u_2, \ldots, u_n\big)$.
    On note $\widetilde{p}$ le projecteur sur $\mathrm{Vect}(u_1)$ parallèlement à $\mathrm{Vect}\big(u_2, \ldots, u_n\big)$, et on va montrer que $p = \widetilde{p} \circ f$ est un projecteur privilégié pour f.

(a) Montrer que $\mathrm{rg}(p) \leqslant 1$ et calculer $p(u_1)$.

- *On a* $\mathrm{rg}(p) = \mathrm{rg}(\widetilde{p} \circ f) \leqslant \mathrm{rg}(\widetilde{p}) = 1$.
- *On a* $f(u_1) = u_1 + \underbrace{\big(f(u_1) - u_1\big)}_{\in \mathrm{Vect}(u_2,\dots,u_n)}$*, donc* $\widetilde{p}\big(f(u_1)\big) = u_1$*, c'est-à-dire* $p(u_1) = u_1$.

(b) En déduire $E = \mathrm{Vect}(u_1) \oplus \ker(p)$, puis que p est un projecteur de rang 1.

- *D'après le théorème du rang,* $\dim \ker(p) = n - 1$.
- *Comme* $u_1 \neq 0_E$, $\mathrm{Vect}(u_1)$ *est une droite. Puisque* $p(u_1) = u_1 \neq 0_E$*, on a* $u_1 \notin \ker(p)$*, ce qui montre facilement que* $\mathrm{Vect}(u_1)$ *et* $\ker(p)$ *sont en somme directe.*

On en déduit que la droite $\mathrm{Vect}(u_1)$ *et l'hyperplan* $\ker(p)$ *sont supplémentaires.*
Pour tout $x \in \ker(p)$*, on a évidemment* $p(x) = 0_E$*. Comme* $p(u_1) = u_1$*, on a de même* $p(x) = x$ *pour tout* $x \in \mathrm{Vect}(u_1)$*. Cela montre que* p *est le projecteur sur* $\mathrm{Vect}(u_1)$ *parallèlement à* $\ker(p)$*, ce qui conclut.*

(c) Conclure.

D'après la question 13, il suffit de montrer que $\mathrm{im}(p) = \mathrm{Vect}(u_1) = \mathrm{im}(\widetilde{p})$ *et* $\mathrm{im}(f - p)$ *sont en somme directe.*
Or, $f - p = f - \widetilde{p} \circ f = (\mathrm{id}_E - \widetilde{p}) \circ f$*. Or,* $\mathrm{id}_E - \widetilde{p}$ *est le projecteur sur* $\mathrm{Vect}(u_2, \dots, u_n)$ *parallèlement à* $\mathrm{Vect}(u_1)$*, donc les sous-espaces vectoriels* $\mathrm{im}(p)$ *et* $\mathrm{im}(\mathrm{id}_E - \widetilde{p})$ *sont en somme directe (et même supplémentaires).*
L'inclusion $\mathrm{im}(f - p) = \mathrm{im}\big((\mathrm{id}_E - \widetilde{p}) \circ f\big) \subseteq \mathrm{im}(\mathrm{id}_E - \widetilde{p})$ *montre* a fortiori *que* $\mathrm{im}(f - p)$ *et* $\mathrm{im}(p)$ *sont en somme directe, ce qui conclut.*

15. On suppose $f^2 \notin \mathrm{Vect}(f)$.

(a) Montrer que f induit un endomorphisme φ de $\mathrm{im}(f)$, et que cet endomorphisme n'est pas une homothétie.

Le sous-espace vectoriel $\mathrm{im}(f)$ *est tautologiquement stable sous* f*, donc* f *induit bel et bien un endomorphisme* $\varphi \in \mathscr{L}(\mathrm{im}(f))$.
Si φ *était une homothétie, on pourrait trouver* $\alpha \in K$ *tel que* $\varphi = \alpha\, \mathrm{id}_{\mathrm{im}(f)}$ *et on en déduirait, pour tout* $x \in E$,

$$f^2(x) = f\big(f(x)\big) = \varphi\big(f(x)\big) = \alpha\, f(x),$$

ce qui donnerait $f^2 = \alpha f \in \mathrm{Vect}(f)$ *et contredirait l'hypothèse.*

(b) En appliquant judicieusement les questions 9 et 14, montrer que f possède un projecteur privilégié.

Notons $r = \mathrm{rg}(f)$.
Comme $\varphi \in \mathscr{L}(\mathrm{im}(f))$ *n'est pas une homothétie, on peut appliquer la question 9 à* $g = \varphi$ *et* $\tau = 1$*, et obtenir une base* $\check{\mathscr{B}} = (u_1, \dots, u_r)$ *de* $\mathrm{im}(f)$ *telle que* $\big[\mathrm{Mat}_{\check{\mathscr{B}}}(\varphi)\big]_{1,1} = 1$.
(Remarquons que le fait que φ *ne soit pas une homothétie montre notamment* $r \geqslant 2$ *: il n'y a donc pas de problème à appliquer la question 9 à* $\mathrm{im}(f)$*, malgré l'hypothèse générale que la dimension des espaces vectoriels considérés est toujours non nulle.)*
Le vecteur u_1 *est donc un vecteur de* $\mathrm{im}(f)$ *tel que* $f(e_1) = \varphi(e_1)$ *et* $f(e_1) - e_1 \in \mathrm{Vect}(u_2, \dots, u_r)$.
D'après le théorème de la base incomplète, on peut prolonger la base $\check{\mathscr{B}}$ *de* $\mathrm{im}(f)$ *(qui est donc une famille libre de* E*) en une base* $\mathscr{B} = (u_1, \dots, u_n)$ *de* E*. On obtient* a fortiori $u_1 \in \mathrm{im}(f)$ *et* $f(e_1) - e_1 \in \mathrm{Vect}(u_2, \dots, u_n)$.
D'après la question 14, l'endomorphisme f *possède donc un projecteur privilégié.*

Partie V. Théorème HPW : sens difficile.

On va conclure la démonstration du théorème HPW « par récurrence sur le rang de f. » Plus précisément, pour tout $r \in [\![0, n]\!]$, on note $\mathrm{HPW}(r)$ l'assertion

> « Pour tout $f \in \mathscr{L}(E)$ tel que $\mathrm{rg}(f) = r$, $\mathrm{tr}(f) \in \mathbb{N}$ et $\mathrm{tr}(f) \geqslant r$, il existe $m \in \mathbb{N}$ et des projecteurs $p_1, \ldots, p_m \in \mathscr{L}(E)$ tels que $f = \sum_{k=1}^{m} p_k$. »

et on se propose de montrer $\forall r \in [\![0, n]\!], \mathrm{HPW}(r)$ par récurrence finie.

16. Écrire précisément l'initialisation de la récurrence.

    Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ *tel que* $\mathrm{rg}(f) = 0$, $\mathrm{tr}(f) \in \mathbb{N}$ *et* $\mathrm{tr}(f) \geqslant 0$. *L'endomorphisme* f *est donc nul, et la famille vide de projecteurs* $()$, *correspondant à* $m = 0$, *convient.*
    Cela montre $\mathrm{HPW}(0)$.

17. Soit $r \in [\![1, n]\!]$ tel que $\mathrm{HPW}(r-1)$. Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ tel que $\mathrm{rg}(f) = r$, $\mathrm{tr}(f) \in \mathbb{N}$ et $\mathrm{tr}(f) \geqslant r$.
    (a) On suppose $f^2 \notin \mathrm{Vect}(f)$. Montrer que f est une somme de projecteurs.

    D'après le résultat de la partie précédente, f *possède un projecteur privilégié* p.
    L'égalité $\mathrm{im}(f) = \mathrm{im}(p) \oplus \mathrm{im}(f-p)$ *montre (après passage à la dimension) que* $\mathrm{rg}(f-p) = r-1$.
    Par ailleurs, par linéarité de la trace et d'après la question 5b, on a

    $$\mathrm{tr}(f-p) = \mathrm{tr}(f) - \mathrm{tr}(p) = \underbrace{\mathrm{tr}(f) - 1}_{\in \mathbb{N}} \geqslant \mathrm{rg}(f) - 1 = r - 1,$$

    donc l'assertion $\mathrm{HPW}(r-1)$ *montre que* $f - p$ *est une somme de projecteurs.*
    On en déduit que $f = (f-p) + p$ *est également une somme de projecteurs.*

    (b) Conclure la démonstration du théorème HPW.

    Il reste à montrer que f *est une somme de projecteurs dans le cas où* $f^2 \in \mathrm{Vect}(f)$. *Supposons donc être dans ce cas, et fixons* $\alpha \in K$ *tel que* $f^2 = \alpha f$.
    Tout d'abord, $\alpha \neq 0$. *En effet, si l'on avait* $f^2 = 0_{\mathscr{L}(E)}$, *la question 6c montrerait que* $\mathrm{tr}(f) = 0$. *L'inégalité* $\mathrm{tr}(f) \geqslant r$ *entraînerait alors* $r = 0$, *ce qui est exclu.*
    L'endomorphisme $g = \frac{1}{\alpha} f$ *vérifie* $g^2 = g$, *donc il s'agit d'un projecteur. Comme dans la question 5, on peut donc trouver une base* $\mathscr{B}$ *de* E *telle que*

    $$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(g) = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \textit{et donc} \qquad M := \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix} \alpha I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

    Les conditions sur la trace de f *donnent* $\alpha r \in \mathbb{N}$ *et* $\alpha r \geqslant r$ *(ce qui entraîne* $\alpha \geqslant 1$*). Si* $\alpha = 1$, f *est déjà un projecteur, donc il n'y a rien à montrer. De même, si* $r = 1$, *on a* $\alpha \in \mathbb{N}^*$ *et* f *est une somme de projecteurs, en prenant* $m = \alpha$ *et* $p_1 = \cdots = p_m = \frac{1}{\alpha} f$.
    On peut donc supposer $r \geqslant 2$ *et* $\alpha > 1$, *ce qui donne* $\alpha r > r$. *Cette inégalité entre entiers se promeut en l'inégalité large* $\alpha r - 1 \geqslant r$.
    La matrice $N = M - E_{1,1} = \mathrm{diag}\big(\underbrace{\alpha - 1, \alpha, \ldots, \alpha}_{r \textit{ coefficients}}, 0, \ldots, 0\big)$ *est alors de rang* r *(parce que* $\alpha > 1$*), de trace* $\alpha r - 1 \geqslant r$ *et elle vérifie* $N^2 \notin \mathrm{Vect}(N)$ *par un calcul direct exploitant le fait que* $r \geqslant 2$.
    D'après la question précédente, l'endomorphisme h *associé à* N *dans la base* $\mathscr{B}$ *est donc une somme de projecteurs.*
    Par ailleurs, l'endomorphisme p *associé à* $E_{1,1}$ *est lui-même un projecteur (car* $E_{1,1}^2 = E_{1,1}$*).*
    L'endomorphisme $f = h + p$ *est donc lui aussi une somme de projecteurs.*
    Tous les cas ayant été traités, on a montré $\mathrm{HPW}(r)$, *ce qui conclut la démonstration du théorème HPW.*