Khôlle 24 5 mai 2025

Dimension des espaces vectoriels

Thèmes

- ► Toute l'algèbre linéaire précédente.
- ▶ Une sous-famille d'une famille libre est libre. Une sur-famille d'une famille génératrice est génératrice. « Lemme de précipitation. »
- ▶ Théorème de la base intermédiaire et corollaires : théorème de la base extraite, théorème de la base incomplète.
- ▶ Lemme de l'échange de Steinitz.
- ▶ Espaces vectoriels de dimension finie, dimension. Exemples standard : K^n , $M_{n,p}(K)$, $K_n[X]$.
- ► Familles de vecteurs et dimension : inégalité sur le nombre de vecteurs d'une famille libre (resp. génératrice). Équivalence entre la liberté et l'aspect générateur pour une famille de n = dim E vecteurs.
- ▶ Si F est un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel de dimension finie E, alors F est de dimension finie et dim F \leq dim E. Cas d'égalité. Existence de bases adaptées.
- ► Formule de Grassmann. Dimension d'un produit cartésien. Existence et dimension des supplémentaires.
- ► Caractérisations de la supplémentarité.
- ▶ Rang d'une famille \mathcal{F} de n vecteurs de \mathcal{E} : inégalité $\operatorname{rg}(\mathcal{F}) \leqslant \min(n, \dim \mathcal{E})$ et cas d'égalité.
- ▶ Deux espaces vectoriels de dimension finie sont isomorphes si et seulement s'ils ont la même dimension.
- ▶ Rang d'une application linéaire : définition et formule du rang. Conséquences (inégalités sur le rang, rang d'une composée, caractérisation de l'injectivité et la surjectivité). Si dim E = dim F, l'injectivité équivaut à la surjectivité. Cas des endomorphismes.
- ► Forme géométrique du théorème du rang.
- ▶ Formes linéaires et hyperplans.

Questions de cours

- ▶ Lemme de précipitation.
- ▶ Soit \mathcal{F} une famille de n vecteurs de E. Si \mathcal{F} est libre, alors $n \leq \dim E$.
 - Dans le cas d'égalité, F est une base de E.
- ▶ Soit \mathcal{F} une famille de \mathfrak{n} vecteurs de E. Si \mathcal{F} est génératrice, alors $\mathfrak{n} \geqslant \dim E$.
 - Dans le cas d'égalité, F est une base de E.
- ► Formule de Grassmann.
- ▶ Un exemple : utilisation de la dimension pour l'interpolation de Lagrange.