Généralités sur les fonctions réelles

Exercice 5.

Pour la deuxième question, on pourra admettre que la dérivée d'une fonction T-périodique dérivable est encore T-périodique.

Il est alors souvent possible de montrer que si $x \mapsto \sin(x) + \sin(\alpha x)$ est T-périodique, alors $x \mapsto \sin(x)$ et $x \mapsto \sin(\alpha x)$ sont individuellement T-périodiques.

Exercice 6.

On pourra commencer par constater que le graphe d'une telle fonction est nécessairement invariant par une certaine translation.

Exercice 7.

On pourra utiliser la propriété fondamentale de l'exponentielle pour montrer que si exp est la somme de $N+1$ fonctions périodiques, alors il existe $\lambda \in \mathbb{R}^*$ tel que $\lambda \exp$ soit la somme de N fonctions périodiques.

Exercice 8.

On pourra procéder par l'absurde.

Exercice 11.

Pour la dernière question, on peut remarquer que, quel que soit $r \in \mathbb{N}$, on peut trouver des réels $0 < x_0 < x_1 < \cdots < x_r < 1$ tels que $\forall j \in [\![1, r]\!], |x_j - x_{j-1}| = 1$. En particulier, on peut rendre la somme $|x_1 - x_0| + \cdots + |x_r - x_{r-1}|$ arbitrairement grande (en faisant varier r).

Exercice 12.

On verra plus tard qu'un tel exemple ne peut pas être continu...

Exercice 15.

On pourra chercher à définir une fonction f telle que $f(x)$ ne dépende que de la « fin » de l'écriture décimale de x. Par exemple,

$$f : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \begin{cases} \varphi\left((b_n)_{n\in\mathbb{N}}\right) & \text{s'il existe } (b_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \{0,1\}^{\mathbb{N}} \text{ telle que } x = \underbrace{\ldots,\ldots\ldots}_{\text{n'imp. quoi}} 2\, \underbrace{b_0 b_1 b_2 b_3 \ldots}_{\text{des 0 et des 1}}\,; \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \end{cases}$$

Autocorrection

Autocorrection A.

1. On montre facilement que la somme de deux fonctions paires (resp. impaires) est paire (resp. impaire).

   Traitons par exemple le cas impair.

   Soit $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fonctions impaires. Montrons que $f + g$ est impaire.

   Soit $x \in \mathbb{R}$. On a

$$\begin{aligned}(f+g)(-x) &= f(-x) + g(-x) \\ &= -f(x) - g(x) && \text{par imparité de } f \text{ et de } g \\ &= -(f+g)(x),\end{aligned}$$

   ce qui démontre que $f + g$ est impaire.

   En revanche, on ne peut pas déterminer le sens de variation de la somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire. Donnons deux arguments en ce sens.

   - Considérons la fonction
$$f : \begin{cases} \mathbb{R} \to & \mathbb{R} \\ x \mapsto & 1 + x. \end{cases}$$
     Cette fonction est la somme de $x \mapsto 1$ (paire) et $x \mapsto x$ (impaire). Pourtant, on vérifie aisément qu'elle n'est ni paire, ni impaire, car $f(-1) = 0$ et $f(1) = 2$, qui ne sont ni égaux ni opposés.
   - On a vue que toute fonction se décomposait (en fait, d'une unique manière, même si cela n'importe guère ici) en une somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire. Le fait d'être somme de deux telles fonctions n'apporte donc aucune information sur la fonction somme. En particulier, il n'y a rien à dire sur son sens de variation.

   En résumé, on a la « table d'addition » suivante.

$+$	paire	impaire
paire	paire	?
impaire	?	impaire

2. La parité de deux fonctions détermine la parité de leur produit, selon la « table de multiplication » suivante.

$\times$	paire	impaire
paire	paire	impaire
impaire	impaire	paire

   Montrons par exemple que le produit d'une fonction paire et d'une fonction impaire est une fonction impaire.

   Soit donc $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fonctions, paire et impaire, respectivement. Montrons que le produit pi est impair.

   Soit $x \in \mathbb{R}$. On a

$$\begin{aligned}(pi)(-x) &= p(-x)\, i(-x) \\ &= p(x) \times (-i(x)) \\ &= -p(x)\, i(x) \\ &= -(pi)(x),\end{aligned}$$

   ce qui conclut la preuve.

3. La parité de deux fonctions détermine la parité de leur composition, selon la « table de composition » suivante.

$\circ$	paire	impaire
paire	paire	paire
impaire	paire	impaire

Montrons par exemple que la composée (dans l'un ou l'autre sens) d'une fonction paire et d'une fonction impaire est une fonction paire.

Soit donc $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fonctions, paire et impaire, respectivement.

Soit $x \in \mathbb{R}$. On a

$$\begin{aligned}(p \circ i)(-x) &= p\,(i(-x)) \\ &= p\,(-i(x)) \\ &= p\,(i(x)) \\ &= (p \circ i)(x),\end{aligned}$$

ce qui montre que $p \circ i$ est paire.

De même, on a

$$\begin{aligned}(i \circ p)(-x) &= i\,(p(-x)) \\ &= i\,(p(x)) \\ &= (i \circ p)(x),\end{aligned}$$

ce qui montre que $p \circ i$ est paire.

4. La composée $h \circ f$ est paire, si f est paire. En effet, soit $x \in \mathbb{R}$. On a

$$\begin{aligned}(h \circ f)\,(-x) &= h\,(f(-x)) \\ &= h\,(f(x)) \\ &= (h \circ f)(x).\end{aligned}$$

En revanche, il n'y a rien à dire sur une composée $h \circ f$, si f est impaire. Par exemple, si h n'est ni paire, ni impaire et que $f = \mathrm{id}_{\mathbb{R}}$ (qui est impaire), on a $h \circ f = h$.

5. Que f soit paire ou impaire, il n'y a rien à dire sur la composée $f \circ h$. Par exemple, si $h : x \mapsto 1 + x$, les fonctions $x \mapsto (1 + x)^2$ (correspondant à la fonction paire $f : x \mapsto x^2$) et $x \mapsto 1 + x$ (correspondant à la fonction impaire $f = \mathrm{id}_{\mathbb{R}}$) ne sont ni paires ni impaires.