Généralités sur les fonctions réelles

Autocorrection A.

Peut-on déterminer, en général, la parité de

(i) la somme de deux fonctions, si on connaît leur parité ?

(ii) le produit de deux fonctions, si on connaît leur parité ?

(iii) la composée de deux fonctions, si on connaît leur parité ?

(iv) la composée $h \circ f$, si f est paire (resp. impaire) et h est quelconque ?

(v) la composée $f \circ h$, dans les mêmes conditions ?

Exercice 1.

Décrire pour quels $x \in \mathbb{R}$ les expressions suivantes ont un sens, puis tracer rapidement le graphe des fonctions qu'elles définissent.

(i) $2\ln\dfrac{1}{2-x}$; (ii) $\sqrt{3x-2}-1$; (iii) $\dfrac{4}{2x+1}+3$.

Exercice 2.

Soit $a \in \mathbb{R}$. On pose $f_a : \begin{cases} \mathbb{R} \to & \mathbb{R} \\ x \mapsto & \begin{cases} x+a & \text{si } x \geqslant 0 \\ x & \text{sinon.} \end{cases} \end{cases}$

1. Exprimer f_a à l'aide notamment d'une fonction indicatrice.
2. Donner une condition nécessaire et suffisante sur $a \in \mathbb{R}$ pour que f_a soit injective (resp. surjective, bijective).

Exercice 3.

Soit $D \subseteq \mathbb{R}$ et $T \in \mathbb{R}_+^*$.

1. Montrer que D est un domaine T-périodique si et seulement si $\mathbb{1}_D$ est une fonction T-périodique.
2. À quelle condition portant sur D la fonction $\mathbb{1}_D$ est-elle paire ?
3. À quelle condition portant sur D la fonction $\mathbb{1}_D$ est-elle impaire ?
4. À quelle condition portant sur D la fonction $\mathbb{1}_D$ est-elle croissante ?

Périodicité

Exercice 4.

Soit $A \subseteq \mathbb{R}$. Montrer que $\cos^{-1}[A]$ est un domaine 2π-périodique.

Exercice 5$^+$.

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.

1. Montrer que $x \mapsto \cos(x) + \cos(\alpha x)$ est périodique si et seulement si $\alpha \in \mathbb{Q}$.
2. Même question pour la fonction $x \mapsto \sin(x) + \sin(\alpha x)$.

Exercice 6$^+$.

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction telle que le graphe de f admette deux centres de symétrie.

Montrer que f est la somme d'une fonction affine et d'une fonction périodique.

Exercice 7^{++}.

Montrer que l'exponentielle n'est pas la somme d'un nombre fini de fonctions périodiques.

Monotonie

Exercice 8.

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction telle que $f \circ f$ soit croissante et $f \circ f \circ f$ strictement décroissante. Montrer que f est strictement décroissante.

Exercice 9.

Déterminer les fonctions $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ monotones et périodiques.

Exercice 10^{+}.

Étant donné $a, b \in \mathbb{R}$, on notera $\langle a, b\rangle = [\min(a, b), \max(a, b)]$. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Montrer que f est monotone si et seulement si

$$\forall a, b, c \in \mathbb{R}, c \in \langle a, b\rangle \Rightarrow f(c) \in \langle f(a), f(b)\rangle.$$

Exercice 11.

1. Donner un exemple de fonction non monotone qui est la somme d'une fonction croissante et d'une fonction décroissante.
2. Montrer que sin est la somme d'une fonction croissante et d'une fonction décroissante.
3.$^{++}$ Montrer que $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}$ n'est pas la somme d'une fonction croissante et d'une fonction décroissante.

Bornes et extrema

Exercice 12.

Donner un exemple de fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ périodique et non bornée.

Exercice 13.

Étant donné $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, on note $\mathcal{M}(f)$ l'ensemble des réels en lesquels f atteint son minimum.

1. Donner un exemple de fonction minorée telle que $\mathcal{M}(f)$ soit vide.
2. Donner un exemple de fonction telle que $\mathcal{M}(f)$ soit infini.
3. On suppose f monotone. Que dire de $\mathcal{M}(f)$?

Tératologie

Exercice 14^{+}.

On définit une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ envoyant tout rationnel $\frac{p}{q}$ (sous forme irréductible, c'est-à-dire que $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$ sont premiers entre eux) sur son dénominateur q, et tout irrationnel sur 0.

Montrer que, quels que soient $a < b$, la restriction de f à $[a, b]$ n'est pas majorée.

Exercice 15^{+++}.

On admet qu'il existe une bijection $\varphi : \{0, 1\}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}$. En déduire qu'il existe une application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que, pour tous $a < b \in \mathbb{R}$, la restriction de f à $[a, b]$ soit surjective.